

Corso di Matematica e Statistica.

Primo compito intermedio 31.10.2014

Esercizio 1. (5 punti) Si trovino le coordinate del punto P di intersezione della retta passante per i punti $A = (-2, 0)$ e $B = (0, 1)$ con l'asse delle x . Si scriva l'equazione della retta passante per P e perpendicolare alla retta per A e B .

Esercizio 2. (6 punti) La temperatura $T(x)$ di un radiatore è di 80 gradi al tempo $x = 0$, istante in cui si spegne la caldaia e a partire dal quale la temperatura del radiatore decade secondo una legge esponenziale, tendendo alla temperatura ambiente di 20 gradi. Al tempo $x = 10$ si rileva la temperatura $T(10) = 30$. Si determini la legge che esprime T in funzione di $x \geq 0$.

Esercizio 3. (6 punti) (a) Sia $f(x)$ una funzione reale definita per $x > 0$. Si dica cosa significa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

(b) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $|f(x) - \frac{1}{x}| \leq 1$ per ogni $x > 0$; è vero che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$?

Esercizio 4. (8 punti) Data la funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) definita da

$$f(x) = (e^{2x} - e^{x+1})^{-1/2}$$

(a) Si determini l'insieme di definizione D di f .

(b) Si determini $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, e si dica se f ha asintoti verticali.

Esercizio 5. (9 punti) (a) Determinare se i seguenti insiemi sono sottospazi di \mathbb{R}^3 ; in caso affermativo, calcolarne la dimensione e esibirne una base.

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 x_2 = 0\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$$

(b) Dati i vettori $\mathbf{x} = (k, k+1, 1-k)$, $\mathbf{y} = (2t, t+1, -2t-1)$, $\mathbf{z} = (2, 1, -3)$, con $k, t \in \mathbb{R}$:

1. Determinare t tale che $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 26$.

2. Scelti $k = 1$ e $t = 2$, i tre vettori sono linearmente indipendenti? In caso negativo, scrivere una combinazione lineare dei tre vettori a coefficienti non nulli che dia come risultato il vettore nullo.