

Corso di Matematica e Statistica.
Secondo compito intermedio, 6.12.2013

Esercizio 1. (8 punti) Si ipotizza che una certa quantità sperimentale y vari in dipendenza del tempo x , espresso in giorni, mediante una legge sinusoidale $y(x)$ della quale si conosce il periodo, che è di 42 giorni.

- All'inizio della sperimentazione (cioè per $x = 0$) si ha $y(0) = 14$.
- Per alcuni giorni la quantità y cresce, quindi, dopo 7 giorni, si registra un valore massimo, che è $y(7) = 18$.

- (a) Si trovi l'espressione analitica della funzione $y(x)$;
(b) si dica dopo quanti giorni dall'inizio dell'esperimento si prevede di ottenere, per la prima volta, $y = 6$.

Esercizio 2. (7 punti) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione reale definita da, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ (x-1)^3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Si dica se, nei punti $x = 0$ e $x = 1$ tale funzione è continua e, in caso affermativo, se è ivi derivabile.
(b) Si dica per quali valori di x la tangente al grafico di f in nel punto $(x, f(x))$ è parallela alla retta $y = 2x$.

Esercizio 3. (10 punti) Sia data la regola

$$f(x) = \frac{\log^2 x}{1 - \log(x^2)}$$

- (a) Si determini l'insieme di definizione I della funzione reale $f(x)$;
(b) Si studi la funzione $f(x)$, determinandone qualitativamente il grafico;
(c) Si dica per quali $t \in I$ si ha $f(e^t) = t$.

Esercizio 4. (7 punti) Fissato il numero reale $a > 0$, in un sistema di riferimento cartesiano, si considerino i punti $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (0, 3a)$. Si determinino le coordinate del punto P situato sull'asse delle y , tale che sia minima la somma delle distanze

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$$