Corso di Matematica e Statistica.

Simulazione compito intermedio, 30.10.2013

Esercizio 1. (6 punti) Siamo alle battute conclusive di una partita al Gioco dell'Oca; al giocatore Verde, che sopravanza il giocatore Nero di due caselle, è sufficiente realizzare un 3 per raggiungere la meta. I due giocatori lanciano contemporaneamente un dado (a sei facce): nel caso entrambi raggiungano la meta la partita è considerata patta. Determinare la probabilità che, con un lancio di dadi:

1) il giocatore Verde vinca la partita; 2) il giocatore Nero vinca la partita;

3) la partita finisca in patta; 4) nessuno dei due giocatori raggiunga la meta.

Soluzione. Ogni giocatore lancia il dado; lo spazio degli eventi è quello naturale delle coppie di numeri da 1 a 6: $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, \dots, 6\}\}$, dunque $|\Omega| = 36$. Denotiamo con $\mathbf{v}$ e con $\mathbf{n}$, rispettivamente, il punteggio realizzato col lancio del dado dal giocatore Verde e quello realizzato dal giocatore Nero.

1. Verde vince la partita se $\mathbf{v} \in \{3, 4, 5, 6\}$ e $\mathbf{n} \in \{1, 2, 3, 4\}$; i casi favorevoli alla vittoria del Verde sono quindi $4 \times 4 = 16$, e la probabilità che Verde vinca è $16/36 = 4/9$.
[Si può anche ragionare direttamente sulle probabilità, tenendo conto che i lanci dei dadi da parte dei due giocatori sono ovviamente indipendenti. Quindi, poiché la probabilità $p(V)$ che Verde arrivi alla meta è $4/6$ e quella che Nero non ci arrivi è $p(\overline{N}) = 4/6$, si conclude che la probabilità che il Verde vinca è $p(V \cap \overline{N}) = p(V)p(\overline{N}) = 16/36 = 4/9$].

2. Nero vince la partita se $\mathbf{v} \in \{1, 2\}$ e $\mathbf{n} \in \{5, 6\}$; i casi favorevoli alla vittoria del Nero sono $2 \times 2 = 4$, e la probabilità che Nero vinca è $4/36 = 1/9$.

3. Si ha parità se $\mathbf{v} \in \{3, 4, 5, 6\}$ e $\mathbf{n} \in \{5, 6\}$; i casi favorevoli alla patta sono $4 \times 2 = 8$, e la probabilità che la partita termini in parità è $8/36 = 2/9$.

4. Nessuno guinge alla meta nei casi $\mathbf{v} \in \{1, 2\}$ e $\mathbf{n} \in \{1, 2, 3, 4\}$; il numero di questi casi è $2 \times 4 = 8$, e la probabilità che nessuno vinca è $8/36 = 2/9$.
[Si osservi che i quattro eventi di cui si è calcolato la probabilità sono a due a due incompatibili e che la loro unione ricopre l intero spazio degli eventi; la somma delle probabilità è, infatti, $4/9 + 1/9 + 2/9 + 2/9 = 9/9 = 1$.]

Esercizio 2. (9 punti) Siano A, B eventi in uno spazio di eventi Ω.

1. Cosa si intende dicendo che A e B sono eventi *indipendenti.*;
2. è vero che se A e B sono indipendenti allora anche i loro complementari $\overline{A}$ e $\overline{B}$ lo sono? si cerchi di provare in modo rigoroso l'affermazione fatta.
3. Da un mazzo di carte napoletane (40 carte in 4 semi diversi) viene estratta una carte; si dica quali coppie fra quelle che si possono costituire fra i seguenti eventi sono indipendenti:
   A : la carta estratta è un due;

B : la carta estratta è una carta di bastoni;
C: la carta estratta ha valore minore o uguale a 5;

Soluzione. 1. Gli eventi A e B sono indipendenti se $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

2. Supponiamo che A e B siano indipendenti e verifichiamo che per i complementari vale l'identità

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A})p(\overline{B})$$

che stabilisce la loro indipendenza. Per farlo, si può ricorrere all'identità di De Morgan $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$, e la formula $p(A \cup B) = 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B)$. Abbiamo,

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B) =$$

$$= 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B) = (1 - p(A))(1 - p(B)) = p(\overline{A})p(\overline{B}).$$

dunque $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono indipendenti.

3. Abbiamo, per ovvie considerazioni,

$$p(A) = 4/40 = 1/10, \quad p(B) = 10/40 = 1/4 \ \text{ e } \ p(C) = 20/40 = 1/2.$$

E, ancora,

$$p(A \cap B) = 1/40, \quad p(A \cap C) = 4/40, \quad p(B \cap C) = 5/40.$$

Ora, basta esaminare le varie possibilità. Si trova che

$$p(A \cap B) = 1/40 = (1/10)(1/4) = p(A)p(B)$$

e dunque A e B sono indipendenti. Calcolando allo stesso modo,

$$p(B \cap C) = 5/40 = 1/8 = (1/4)(1/2) = p(B)p(C)$$

$$p(A \cap C) = 4/40 \neq (1/10)(1/2) = p(A)p(C)$$

dunque B e C sono indipendenti, mentre A e C non lo sono.

Esercizio 3. (6 punti) Un test diagnostico per una certa malattia ha specificità 0.98 e sensibilità 0.96.

1. qual è il valore predittivo positivo (cioè la probabilità che risultando il test positivo si abbia la malattia) se l'incidenza della malattia è di 2%;

2. quale incidenza dovrebbe avere la stessa malattia affinché il valore predittivo positivo del test superi il 50% ?

Soluzione. 1. Denotiamo con V^+ il valore predittivo cercato. Per definizione e la formula di Bayes

$$V^+ = p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+)p(M^+)}{p(T^+)}. \tag{1}$$

dove $p(T^+|M^+) = 0.96$ è la sensibilità del test e $p(M^+) = 0.02$ l'incidenza della malattia. Per calcolare il denominatore si può usare la formula delle alternative, ricordando che $p(T^-|M^-) = 0.98$ è la specificità del test. Si ha

$$\begin{aligned} p(T^+) &= p(T^+|M^+)p(M^+) + p(T^+|M^-)p(M^-) = \\ &= p(T^+|M^+)p(M^+) + (1 - p(T^-|M^-))(1 - p(M^+)) = \\ &= 0.96 \times 0.02 + 0.02 \times 0.98 = 0.02 \times 1.94 \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione (1),

$$V^+ = \frac{0.96 \times 0.02}{1.94 \times 0.02} \sim 0.495$$

che è il valore cercato.

2. In questo punto l'incognita è $x = p(M^+)$. Come nel punto precedente,

$$p(T^+) = p(T^+|M^+)x + p(T^+|M^-)(1 - x) = 0.96x + 0.02(1 - x) = 0.94x + 0.02.$$

Poi, dall'equazione (1) e dalle condizioni del testo,

$$0.5 \leq V^+ = \frac{p(T^+|M^+)x}{p(T^+)} = \frac{0.96x}{0.94x + 0.02}.$$

Si tratta quindi di risolvere la disequazione

$$\frac{0.96x}{0.94x + 0.02} \geq 0.5$$

ovvero

$$0.96x \geq 0.5(0.94x + 0.02) = 0.47x + 0.01$$

quindi

$$(0.96 - 0.47)x \geq 0.01$$

da cui

$$x \geq \frac{0.01}{0.49} = \frac{1}{49} \sim 0.0204$$

[**Nota.** Nello scrivere il testo ho inavvertitamente scambiato i valori di specificità e sensibilità rispetto a quelli che avevo preparato: per questo le risposte danno risultati così vicini e i calcoli non sono immediati. Mi scuso...]

Esercizio 4. (6 punti) Una slot-machine è formata da tre ruote, ognuna delle quali contiene otto caselle di cui 2 recano il disegno di una ciliegia e le rimanenti sei i numeri da 1 a 6. Qual è la probabilità che, azionando la leva:

1. escano esattamente due ciliegie;

2. escano tre simboli uguali.

Soluzione. 1. La probabilità che, su ciascuna ruota, esca una ciliegia è $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Le tre ruote poi sono indipendenti l'una dall'altra. La risposta al punto 1. è quindi un'applicazione della formula per gli eventi bernoulliani:

$$p(2cil) = \binom{3}{2} p^2(1-p) = 3 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64} = 0,140625$$

2. Lo spazio degli eventi è costituito da 8^3 casi. Di questi quelli in cui i tre simboli sono uguali sono 6 se il simbolo comune non è la ciliegia e $2^3 = 8$ se è la ciliegia; quindi i casi favorevoli sono $6 + 8n = 14$. Pertanto, la probabilità cercata è

$$\frac{14}{8^3} \sim 0.027$$

Il caso di tre simboli diversi è più complicato da analizzare: questo perché la ciliegia ha più probabilità di uscire di uno specifico numero. Mantenendo lo spazio degli eventi quello di tutte le possibili ruotate (quindi $|\Omega| = 8^3$), possiamo ripartire l'evento $A =$ "tutti simboli diversi" in due casi tra loro incompatibili:
A_1 i simboli sono diversi e *non c'è* la ciliegia;
A_2 i simboli sono diversi e *c'è* la ciliegia;.
$|A_1|$ si calcola facilmente, infatti - poiché i numeri sono sei in ogni ruota - è uguale al numero di disposizioni senza ripetizione

$$|A_1| = D_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

Per calcolare $|A_2|$ possiamo calcorae quante sono le coppie ordinate di smboli diversi tra loro e dalla ciliegia, che sono $6 \cdot 5$; poi tener conto che la ciliegia, può uscire in 6 modi; si ha quindi

$$|A_2| = 6 \cdot (6 \cdot 5).$$

Dunque $|A| = |A_1| + |A_2| = 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \cdot 5 = 300$. Pertanto, la probabilità che escano tere simboli diversi è:

$$p(diversi) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{300}{512} \sim 0.586.$$

Esercizio 5. (6 punti) È data la funzione

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ a & \mapsto & 2a - 1 \end{array}$$

si dica (motivando le risposte) se f è iniettiva e/o surgettiva.

Soluzione. La funzione f è iniettiva. Infatti dati $a, b \in \mathbb{Z}$ (dominio)

$$f(a) = f(b) \;\Leftrightarrow\; 2a - 1 = 2b - 1 \;\Leftrightarrow\; 2a = 2b \;\Leftrightarrow\; a = b.$$

Dunque elementi del dominio hanno la stessa immagine se e solo se sono uguali; pertanto, f è iniettiva.

La funzione f non è suriettiva. Infatti per ogni $a \in \mathbb{Z}$, $f(a)$ è un numero dispari, mentre il codominio $\mathbb{Z}$ contiene anche i numeri pari. Così, ad esempio, **non** esiste alcun $a \in \mathbb{Z}$ (dominio) tale che $f(a) = 2$.