

Corso di Matematica e Statistica.

Prova compito intermedio, 31.10.2013

Esercizio 1. Dopo l'accensione (che avviene all'istante $x = 0$, la temperatura T di un certo apparato cresce, rispetto al tempo x , secondo una legge esponenziale il cui limite (per $x \rightarrow \infty$) è 60 gradi. Si misurano le seguenti temperature: $T(5) = 40$, $T(10) = 50$.

Si trovi la legge che esprime T in funzione di $x \geq 0$, determinando, in particolare, qual è stata la temperatura iniziale dell'apparato.

Esercizio 2. (a) Sia $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ una successione. Si dica cosa significa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

(b) Si consideri la successione i cui termini sono dati da, per ogni $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2n}{n+2}$$

si provi che è una successione crescente; quindi si determini $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Esercizio 3. Si risolva la seguente disequazione esponenziale:

$$e^x + e^{2x} \geq 2.$$

Esercizio 4. Data la funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) definita da

$$f(x) = \frac{2x^2}{2\log x + 1}.$$

(a) Si determini l'insieme di definizione D di f .

(b) Si determini, se esiste $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Si dica se f ha asintoti verticali; si determini il limite a $+\infty$.

Esercizio 5. (a) Determinare se i seguenti insiemi sono sottospazi di \mathbb{R}^3 ; in caso affermativo, calcolarne la dimensione e esibirne una base.

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 + 4 = 0\}$$

(b) Dati i seguenti vettori $\mathbf{x} = (k, k-1, k)$, $\mathbf{y} = (t, 1, 2)$, $\mathbf{z} = (0, 2, 1)$, con $k, t \in \mathbb{R}$:

1. determinare per quali valori di k si ha che $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{2}$;
2. posto $k = 1$, determinare t tale che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{7}{2}$.
3. posto $t = \frac{3}{2}$, i tre vettori sono linearmente indipendenti? In caso negativo, scrivere una combinazione lineare dei tre vettori a coefficienti non nulli che dia come risultato il vettore nullo.