Corso di Matematica e Statistica - a.a. 2014/2015
SOLUZIONI COMPITO PROVA N. 3

Esercizio 1. *Calcolare il valore del seguente integrale definito*

$$\int_0^{\pi} |x \sin x \cos x|\, dx$$

SOLUZIONE: Poiché

$$\begin{array}{ll} x\sin x \geq 0 & \text{per ogni } x \in [0,\pi], \\ \cos x \geq 0 & \text{per } \ 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \cos x \geq 0 & \text{per } \ \pi/2 \leq x \leq \pi \end{array}$$

si ha

$$A = \int_0^{\pi} |x \sin x \cos x|\, dx = \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -x \sin x \cos x \, dx \tag{1}$$

Procuriamoci quindi l'integrale indefinito

$$\int x \sin x \cos x dx.$$

Conviene ricordare (oppure ricavare con il metodo dell'integrazione per parti):

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C. \tag{2}$$

Integrando per parti, con $f(x) = x\sin x$ e $g'(x) = \cos x$:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \cos x dx &= x \sin^2 x - \textstyle\int (\sin x + x\cos x) \sin x \, dx = \\ &= x\sin^2 x - \textstyle\int \sin^2 x \, dx - \textstyle\int x \cos x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Dunque, ricorrendo a (2),

$$2\int x \sin x \cos x dx = x\sin^2 x - \int \sin^2 x\, dx = x \sin^2 x - \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

da cui

$$\int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} x \sin^2 x - \frac{1}{4}(x - \sin x \cos x) + C \tag{3}$$

Dunque

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \cos x \, dx = \left[\frac{1}{2} x \sin^2 x - \frac{1}{4}(x - \sin x \cos x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

e similmente

$$\int_{\pi/2}^{\pi} -x \sin x \cos x \, dx = \left[\frac{1}{4}(x - \sin x \cos x) - \frac{1}{2} x \sin^2 x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$$

Per (1), si ha infine:

$$A = \frac{1}{8}\pi + \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 2. *Fissato un numero reale $R \geq 0$, sia $P = (a, b)$ il punto d'incontro delle curve $f(x) = Rx^2$ e $g(x) = x^4$ tale che $a > 0$. Si determini R in modo che l'area delimitata dalle due curve tra l'origine O e il punto P sia uguale a* $64/15$.

Soluzione: Determiniamo (in funzione di R) le coordinate di P; si ha

$$b = f(a) = g(a) \quad \text{quindi} \quad Ra^2 = a^4$$

da cui $a^2 = R$ e poiché, per ipotesi, $a > 0$, si conclude $a = \sqrt{R}$. Dunque

$$P = (\sqrt{R}, R^2).$$

L'altro punto di intersezione tra i due grafici è l'origine O. Osserviamo poi che per $x \in [0, \sqrt{R}]$, $g(x) \leq f(x)$. L'area della superficie delimitata dai due grafici è pertanto data da

$$\int_0^{\sqrt{R}} (Rx^2 - x^4) dx = \left[\frac{Rx^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{R}} = \frac{R^2\sqrt{R}}{3} - \frac{R^2\sqrt{R}}{5} = \frac{2}{15} R^2 \sqrt{R}.$$

Imponendo il valore richiesto:

$$\frac{2}{15} R^2 \sqrt{R} = \frac{64}{15}$$

si ricava

$$R^{5/2} = R^2 \sqrt{R} = 32 = 2^5 = 4^{5/2}$$

e quindi $R = 4$.

Esercizio 3. *Dato $0 < k \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione*

$$f(x) = kxe^{-x^2}$$

(a) Qual è il valor medio assunto da $f(x)$ nell'intervallo $[0, k]$? (in funzione di k)

(b) Si determini il valore del parametro k in modo che

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2.$$

Soluzione: Cominciamo con il procurarci l'integrale indefinito di $f(x)$; ponendo $t = -x^2$, si ha $dt = -2xdx$; quindi

$$\int kxe^{-x^2}dx = -\frac{k}{2}\int e^t dt = -\frac{k}{2}e^t + C = -\frac{k}{2}e^{-x^2} + C. \tag{4}$$

(a) Per quanto riguarda il valore medio M nell'intervallo $[0, k]$ si ha per definizione

$$M = \frac{1}{k}\int_0^k kxe^{-x^2}dx = \frac{1}{k}\left[-\frac{k}{2}e^{-x^2}\right]_0^k = \frac{1}{2}\left[-e^{-x^2}\right]_0^k = \frac{1}{2}(1 - e^{-k^2}).$$

(b) Dato il parametro k, si vuole

$$2 = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x kte^{-t^2}dt. \tag{5}$$

Ora, per (4),

$$\int_0^x kte^{-t^2}dt = \left[-\frac{k}{2}e^{-t^2}\right]_0^x = \frac{k}{2}(1 - e^{-x^2});$$

siccome

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{2}(1 - e^{-x^2}) = \frac{k}{2}$$

da (5) si conclude $k = 4$.

Esercizio 4. *Si determini la funzione $y = y(x)$ che risolve il problema seguente:*

$$\begin{cases} y' = e^{y-x} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Soluzione: L'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y' = e^{y-x} = e^y \cdot e^{-x}$$

si risolve separando le variabili; essa diventa

$$e^{-y}\frac{dy}{dx} = e^{-x};$$

quindi,

$$\int e^{-y}dy = \int e^{-x}dx.$$

Integrando, si ottiene, $-e^{-y} = -e^{-x}+C$, con C una costante; quindi $e^{-y} = e^{-x}+C$ e applicando il logaritmo

$$y = -\log(e^{-x} + C) \tag{6}$$

Il valore di C si determina imponendo la condizione iniziale:

$$-1 = y(0) = -\log(e^{-0} + C) = -\log(1 + C)$$

per cui, $\log(1 + C) = 1 = \log e$, quindi $C = e - 1$, che sostituito in (6) dà la soluzione cercata

$$y(x) = -\log(e^{-x} + e - 1).$$

Esercizio 5. *(a) Da un mazzo di* 40 *carte italiane vengono estratte* 3 *carte; qual è la probabilità che ci si almeno una carta di fiori ?*
(b) Da ciascuno di tre distinti mazzi di 40 *carte viene estratta una carta; qual è la probabilità che fra le tre carte così estratte ci si almeno una carta di fiori ?*

Soluzione: (a) In questo caso, si tratta di gruppi di 3 carte estratte dallo stesso mazzo di 40. Lo spazio degli eventi Ω è l'insieme di tali terne, e dunque

$$|\Omega| = \binom{40}{3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{2 \cdot 3} = 9880.$$

Le terne che NON contengono carte di fiori sono ovviamente quelle che si possono estrarre dal mazzo a cui sono state tolte le 10 carte di fiori: dunque il numero di tali terne (sfiorite) è

$$\binom{30}{3} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{2 \cdot 3} = 4060.$$

Dunque, la probabilità che non ci sia alcuna carta di fiori in una terna casuale è:

$$q = \frac{4060}{|\Omega|} = \frac{4060}{9880} \sim 0,4109.$$

Quindi, la probabilità che ci sia almeno una carta di fiori è

$$p = 1 - q = 1 - \frac{4060}{9880} = \frac{5820}{9880} \sim 0,589.$$

(b) In questo caso le estrazioni tra i diversi mazzi sono chiaramente indipendenti; per ciascuno mazzo, la probabilità che la carta estratta NON sia di fiori è

$$q = \frac{30}{40} = \frac{3}{4};$$

dunque, la probabilità che nessuna delle tre carte (dai tre mazzi diversi) sia fiori è

$$q = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

La probabilità che almeno una delle tre sia fiori è pertanto

$$p = 1 - q = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} = 0,578125.$$

Esercizio 6. *Una ditta produce due tipi di merendine, A e B, e le mette in vendita inserendo in alcune confezioni un tagliando per un piccolo premio; tale tagliando è inserito nel 8% delle merendine di tipo A e nel 6% di quelle di tipo B (che costano un po' meno). Sapendo che il numero di merendine del tipo B messe in vendita è il doppio di quelle di tipo A, si dica qual è la probabilità che il vincitore di uno dei premi abbia acquistato una merendina di tipo A.*
(esercizio fuori quota): Qual è la probabilità di vincere almeno un premio acquistando due merendine, una di ciascun tipo?

Soluzione: Denotiamo con A e B rispettivamente, l'insieme delle merendine di tipo A e quello delle merendine di tipo B messe in vendita; allora, $n = |A| + |B|$ è il numero totale di merendine in vendita. Poiché $|B| = 2|A|$, ricaviamo: $n = 3|A|$. Possiamo quindi esprimere la probabilità che una merendina presa a caso sia del tipo A o del tipo B come segue:

$$p(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{1}{3}, \qquad p(B) = 1 - p(A) = \frac{2}{3}. \tag{7}$$

Se P è l'insieme delle merendine con il tagliando-premio, i dati a disposizione si rappresentano nel modo seguente:

$$p(P|A) = \frac{8}{100} \qquad p(P|B) = \frac{6}{100} \tag{8}$$

e la domanda "si dica qual è la probabilità che il vincitore di uno dei premi abbia acquistato una merendina di tipo A" si formula come "calcolare la probabilità condizionata $p(A|P)$". Per farlo, basta applicare la formula di Bayes

$$p(A|P) = \frac{p(P|A)p(A)}{p(P)} = \frac{2}{75} \cdot \frac{1}{p(P)} \tag{9}$$

Serve quindi determinare $p(P)$; cosa che facciamo mediante la formula delle alternative, a partire da (7) e (8):

$$p(P) = p(P|A)p(A) + p(P|B)p(B) = \frac{8}{300} + \frac{12}{300} = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}.$$

Sostituendo in (9) si ottiene

$$p(A|P) = \frac{2}{75} \cdot 15 = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Esercizio fuori quota: la probabilità che una merendina di tipo A non contenga il tagliando è, ricavandola da (8),

$$p(\overline{P}|A) = 1 - p(P|A) = \frac{92}{100}$$

quella che una merendina di tipo B non contenga il tagliando

$$p(\overline{P}|B) = 1 - p(P|B) = \frac{94}{100}.$$

Poiché tali eventi sono chiaramente indipendenti, la probabilità che acquistando a caso UNA merendina per ogni tipo NON si trovi alcun tagliando è

$$q = p(\overline{P}|A)p(\overline{P}|B) = \frac{92}{100} \cdot \frac{94}{100} = 0,8648$$

e quindi, la la probabilità di vincere almeno un premio acquistando a caso una merendina per ogni tipo è

$$1 - q = 1 - 0,8648 = 0,1352.$$