

Esercizio 1. [9 punti] Si consideri la funzione reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + x - \cos x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Si stabilisca se in $x = 0$ la funzione è continua, e se in $x = 0$ essa è derivabile.
- (b) Si scriva l'espressione della funzione derivata di $f(x)$, ove definita.
- (c) Si dica se la funzione $f(x)$ ammette punti di massimo locale e, in caso affermativo, li si determini.

Esercizio 2. [7 punti]. Si consideri la funzione reale

$$f(x) = \sin x \cos x \sqrt{3 - 2 \sin^2 x}.$$

- (a) Si studi il segno della funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$ (dove positiva, dove negativa).
- (b) Si determini l'area della superficie delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle x nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

Esercizio 3. [5 punti] Sostituendo con la funzione $u = yx$ si risolva il problema:

$$\begin{cases} y' = \frac{x-y}{x} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4. [5 punti] Per $0 < k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \log^2 k & \log k & 1 \\ 2 & 1 & -\log k \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Si dica per quali $k > 0$ il sistema $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ammette una soluzione non nulla.

Esercizio 5. [7 punti] Una biblioteca è composta per un $1/3$ da romanzi gialli, $1/4$ da romanzi di fantascienza ed il rimanente da testi di matematica. Il 25% dei gialli, così come quello dei libri di fantascienza, non è mai stato preso in prestito, mentre non è mai stato preso in prestito il 80% dei libri di matematica.

- (a) Scelto a caso un libro, qual è la probabilità che non sia mai stato preso in prestito?
- (b) Sapendo che un libro non è mai stato preso in prestito, qual è la probabilità che si tratti di un libro di matematica?
- (c) Scegliendo a caso un libro si dica se gli eventi: “trovo un libro che non è di matematica” e “trovo un libro mai preso in prestito” sono indipendenti.