

Esercizio 1. [9 punti]. Si consideri la funzione reale

$$f(x) = \frac{\log^2 x - 1}{\log^2 x + 1};$$

- (a) si determini il dominio (insieme di definizione) D della funzione $f(x)$, e i suoi eventuali asintoti verticali e orizzontali;
- (b) si dica se $f(x)$ ammette punti di massimo o minimo locale o assoluto e, in caso affermativo, li si determini.
- (c) si dica se l'equazione $f(x) = 2$ ha soluzioni per $x \in D$.

Esercizio 2. [6 punti] Dato il parametro $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, si consideri la funzione definita da, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = A \cos\left(\frac{\pi}{5}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

- (a) Si determini il periodo di $f(x)$;
- (b) si determini A in modo che la superficie del solido ottenuto ruotando attorno all'asse x il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[-5, 0]$ sia uguale a 120.

Esercizio 3. [5 punti] Si risolva il problema differenziale:

$$\begin{cases} y' + xy^3 = 0 \\ y'(1) = -1/8. \end{cases}$$

Esercizio 4. [6 punti] Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si considerino i vettori

$$\mathbf{u} = (1, 2, 0), \mathbf{v} = (0, 2, 1) \text{ e } \mathbf{x} = (a, b, b).$$

Si dica per quali coppie di elementi $a, b \in \mathbb{R}$ sono soddisfatte le condizioni seguenti

$$\begin{cases} \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x} \text{ sono linearmente } \mathbf{dipendenti} \\ \|\mathbf{x}\| = 6. \end{cases}$$

Esercizio 5. [7 punti] Da ciascuno di due mazzi di 40 carte [quattro semi e carte numerate da 1 a 10 per ogni seme] viene estratta casualmente una carta.

- (a) Dire quante sono le coppie di carte che si possono estrarre;
- (b) qual è la probabilità che venga estratta una coppia di carte di semi diversi?
- (c) qual è la probabilità che almeno una delle due carte sia del seme di bastoni?