

Esercizio 1. [9 punti] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

(a) si determinino gli eventuali punti di massimo o minimo (assoluto o locale) della funzione f ;

(b) si tracci il grafico di $f(x)$ e dall'analisi qualitativa di questo si dica se la funzione f è iniettiva e/o suriettiva;

(c) si trovi per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ è parallela alla retta passante per i punti $A = (1, -8)$ e $B = (0, 8)$.

Esercizio 2. [4 punti] Si determinino le intersezioni $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$ del grafico della curva $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ con l'asse x ; per ogni $x \in [a, b]$ si consideri il punto $P = (x, f(x))$. Si dica per quale valore di $x \in [a, b]$ l'area del triangolo APB è massima.

Esercizio 3. [4 punti] Dire se il seguente integrale improprio esiste ed in tal caso calcolarlo:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{|\cos x|}{\sin x} dx$$

Esercizio 4. [5 punti] Si determini, se esiste, la funzione $y = y(x)$ che risolve il problema seguente:

$$\begin{cases} y' = e^{y-x} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Esercizio 5. [6 punti] Dati i vettori $\mathbf{x} = (t, t - 1, 2)$, $\mathbf{y} = (0, 1, t)$, $\mathbf{z} = (1, -1, t)$, con $t \in \mathbb{R}$:

(a) determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i vettori $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ sono ortogonali;

(b) determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6. [7 punti] Gli arcieri Aldo, Baldo e Caldo colpiscono il bersaglio con le seguenti probabilità: Aldo 30%, Baldo 40%, Caldo 50%.

(a) Ciascuno dei tre scaglia una freccia; qual è la probabilità che almeno un bersaglio sia centrato ?

(b) Uno dei tre, con una maschera sul viso, scaglia una freccia. Qual è la probabilità che la freccia centri il bersaglio? e qual è la probabilità che si tratti dell'arciere Baldo?