Laurea in Chimica e Tecnologia Farmaceutiche
Corso di Matematica e Statistica:
esame scritto 15.01.2013 - soluzioni

Esercizio 1. *Il professor B acquista una scatola contenente* 40 *funghi neri e* 60 *funghi rossi, con l'intenzione di somministrarli al suo criceto Carletto. Sapendo che (nei criceti) i funghi neri generano allucinazioni con probabilità* 0.60 *e quelli rossi con probabilità* 0.80*, e che, inoltre, le allucinazioni generate dai funghi neri conducono Carletto a tentare di mordere il naso del prof. B, calcolare*

(a) la probabilità che Carletto, ingerito uno dei funghi, abbia le allucinazioni;

(b) le probabilità che, sapendo che il nostro criceto ha ingerito uno dei funghi ed è entrato in stato allucinatorio, egli morda il naso del prof. B.

(c) la probabulità che, avendo ingerito 5 *funghi, Carletto morda il naso al prof. B.*

Soluzione. Fissando le seguenti notazioni per i vari eventi

N : fungo nero, R : fungo rosso, A: allucinazioni,

i dati del problema si riformulano come

$$p(N) = 0.4, \quad p(R) = 0.6, \quad p(A|N) = 0.6, \quad p(A|R) = 0.8.$$

(a) basta applicare la formula delle alternative:

$$p(A) = p(N)p(A|N) + p(R)p(A|R) = 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.8 = 0.72.$$

(b) osservando che l'evento "Carletto morde il prof. B" coincide con $N \cap A$, la probabilità cercata è la probabilità condizionata $p(N|A)$. Basta quindi applicare la formula di Bayes:

$$p(N|A) = \frac{p(N)p(A|N)}{p(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{0.72} = \frac{1}{3} = 0.\overline{3}.$$

(c) I funghi neri che allucinogeni sono $40 \cdot 0.60 = 24$. Quindi i funghi che non inducono il criceto a mordere il prof. B (rossi + neri non allucinogeni) sono $60 + (40 - 24) = 76$. La probabilità che, in 5 ingestioni, Carletto mangi solo funghi di questo tipo è

$$q = \frac{\binom{76}{5}}{\binom{100}{5}} = \frac{76}{100} \cdot \frac{75}{99} \cdot \frac{74}{98} \cdot \frac{73}{97} \cdot \frac{72}{96} \simeq 0.2454$$

Pertanto, la probabilità che, mangiando 5 funghi, il criceto morda il professore, è almeno una volta un fungo nero ed abbia le allucinazioni è

$$1 - q \simeq 0.7546.$$

Esercizio 2. *La sensibilità di un test diagnostico è* 0.60*, la sua specificità* 0.80*. Qual è la probabilità che un individuo il cui test è negativo sia sano?*

Soluzione. I dati non sono sufficienti a fornire una risposta (me ne scuso: nello scrivere ho saltato una riga), che dipende dall'incidenza della malattia da diagnosticare. Supponiamo che questa malattia abbia un'incidenza pari a q (con $0 \leq q \leq 1$).
Indichiamo, come di consueto, con M^+ i soggetti affetti dalla malattia, con M^- quelli non affetti, con T^+ quelli il cui test risulta positivo e T_- quelli il cui test risulta negativo.
Ora, q è la percentuale di individui nella popolazione testata che hanno contratto la malattia, cioè $q = p(M^+)$, mentre, per definizione, indicando con Sp la specificità del test e con Se la sua sensibilità, $Sp = p(T^-|M^-)$ e $Se = p(T^+|M^+)$.

Vogliamo trovare a probabilità che un individuo il cui test è negativo non sia affetto dalla malattia, cioè

$$p(M^-|T^-) = \frac{p(T^-)p(T^-|M^-)}{p(M^-)} = \frac{p(T^-) \cdot Sp}{1-q} = \frac{0.8 \cdot p(T^-)}{1-q}. \tag{1}$$

Ora, per la formula delle alternative

$$\begin{aligned} p(T^-) &= p(T^-|M^-)p(M^-) + p(T^-|M^+)p(M^+) = Sp \cdot (1-q) + (1 - p(T^+|M^+)) \cdot q = \\ &= Sp \cdot (1-q) + (1 - Se) \cdot q = 0.8 - 0.4 \cdot q \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo in (1),

$$p(M^-|T^-) = \frac{0.64 - 0.32 \cdot q}{1-q} = 0.32 \cdot \frac{2-q}{1-q}.$$

Ponendo (come era nel testo non ricopiato) $q = 0.20$ si ha $p(M^-|T^-) = 0.72$.

Esercizio 3. (a) *Si determini l'insieme di definizione della funzione*

$$f(x) = xe^{\frac{1}{\log x}};$$

(b) dire se esiste $\lim_{x\to 1} f(x)$*;*

(c) dire se il grafico della funzione $f(x)$ *interseca la retta* $y = e^2$*;*

(d) dire se la retta $y = 0$ *è un asintoto per la funzione* $f(x)$*.*

Soluzione. (a) la funzione data è definita in x se e solo se $\frac{1}{\log x}$ è definita, ovvero se e solo se $\log x$ è definito ed è $\neq 0$; pertanto l'insieme di definizione (dominio) di $f(x)$ è:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \neq x > 0\} = (0,1) \cup (1,+\infty).$$

(b) Si ha

$$\lim_{x\to 1^-} xe^{\frac{1}{\log x}} = 1 \cdot \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{\log x}} = 1 \cdot 1 = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^+} xe^{\frac{1}{\log x}} = 1 \cdot \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{\log x}} = +\infty$$

quindi $\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste.

(c) Si tratta di stabilire se esiste $x \in D$ tale che $f(x) = e^2$; dunque $xe^{\frac{1}{\log x}} = e^2$. Cioè (sostituendo $x = e^{\log x}$):

$$e^2 = e^{\log x} e^{\frac{1}{\log x}} = e^{\log x + \frac{1}{\log x}}$$

quindi

$$2 = \log x + \frac{1}{\log x} = \frac{\log^2 x + 1}{\log x}$$

da cui si ricava $\log x = 1$, ovvero $x = e$. Poiché $e \in D$ la risposta a (c) è affermativa.

(d) No. Infatti, si osserva che $f(x)$ non è definita per $x \leq 0$ e che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{\log x}} = +\infty.$$

Esercizio 4. *La temperatura in gradi centigradi nell'intervallo di tempo* $[0, 4]$ *di un apparato (rispetto al tempo* x*) è data dalla funzione*

$$T(x) = (x-2)^2 e^{-2x};$$

(a) si dica in quali istanti l'apparato ha raggiunto la temperatura minima e quella massima (nell'intervallo).
(b) qual è stata la temperatura media dell'apparato nell'intervallo.

Soluzione. (a) la funzione temperatura $T(x)$ è derivabile in tutto l'intervallo, e si ha

$$T'(x) = 2(x-2)e^{-2x} - 2e^{-2x}(x-2)^2 = 2(x-2)e^{-2x}(1-(x-2)) = 2(x-2)(3-x)e^{-2x}.$$

Lo studio del segno dà $T'(x) = 0$ per $x = 2, 3$ e

$$T'(x) \geq 0 \iff 2 \leq x \leq 3.$$

qjuindi, 2 e 3 sono, rispettivamente, un punto di minimo relativo ed un punto di massimo relativo per $T(x)$. Ora $T(2) = 0$, $T(3) = e^{-6}$; inoltre occorre valutare la funzione agli estremi dell'intervallo, dunque $T(0) = 4$ e $T(4) = 4e^{-8}$. Poiché $4 > e^{-6}$ mentre $0 < 4e^{-8}$, si conclude che l'apparato ha raggiunto la temperatura massima 4 al tempo $x = 0$ e quella minima 0 al tempo $t = 2$.

(b) Il valore medio della temperatura nel tempo $0 \leq x \leq 4$ è dato da

$$T_M = \frac{1}{4-0}\int_0^4 (x-2)^2 e^{-2x}\, dx.$$

Valutiamo prima l'integrale indefinito; applicando due volte l'integrazione per parti

$$\int (x-2)^2 e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x-2)^2 - \int \Big(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big)2(x-2)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x-2)^2 + \int e^{-2x}(x-2)\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x-2)^2 - \frac{1}{2}e^{-2x}(x-2) + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}(x-2)^2 - \frac{1}{2}e^{-2x}(x-2) - \frac{1}{4}e^{-2x} = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 - 6x + 5).$$

Quindi

$$T_M = \frac{1}{4}\Big[-\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2-6x+5)\Big]_0^4 = \frac{1}{4}\Big(\frac{5}{4} - \frac{13}{4}e^{-8}\Big) = \frac{5e^8 - 13}{16e^8}.$$

Esercizio 5. *Calcolare i seguenti integrali*

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,dx, \qquad \int_0^{\log 2} \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x+1}\,dx &= \int \Big(\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\Big)\,dx = \\ &= \int (x-1)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \log|x+1| + C \end{aligned}$$

Per il secondo integrale, conviene operare la sostituzione $t = e^x$; quindi

$$dt = e^x dx = t dx$$

sostituendo nell'integrale indefinito:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int \frac{t}{1+t^{-1}}\,dt = \int \frac{t^2}{t+1}\,dt.$$

Quindi, applicando il primo integrale e risostituendo,

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}\,dx = \frac{e^x}{2} - e^x + \log(e^x+1) + C$$

infine,

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}\,dx &= \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \log(e^x+1)\Big|_0^{\log 2} = \\ &= (2 - 2 + \log 3) - (\frac{1}{2} - 1 + \log 2) = \log 3 - \log 2 + \frac{1}{2} = \log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. *Una variabile aleatoria X ha funzione di distribuzione data da*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se x} < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{se x} \geq 0 \end{cases}$$

(a) determinare il valore m tale che $p(X > m) = 0.5$.

(b) calcolare la funzione di densità di probabulità della variablie X;

(c) calcolare il valore atteso $E(X)$.

Soluzione. (a) Per la definizione di funzione di distribuzione di una variabile aleatoria (cioè $F_X(t) = p(X \leq t)$) si ha

$$p(X > m) = 1 - F_X(m) = 1 - (1 - e^{-2m}) = e^{-2m}$$

quindi $p(X > m) = 0.5$ se e solo se $e^{-2m} = \frac{1}{2}$, ovvero $-2m = \log \frac{1}{2} = -\log 2$, cioè

$$m = \frac{\log 2}{2} = \log \sqrt{2}.$$

(b) La funzione di densità f_X è la derivata della funzione di distribuzione; quindi

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se x} < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{se x} \geq 0 \end{cases}$$

(c) Per definizione

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-2x}\, dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\int 2xe^{-2x}\, dx = -xe^{-2x} + \int e^{-2x}\, dx = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} E(X) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t 2xe^{-2x}\, dx &= \lim_{t \to +\infty} \Big[-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \Big]_0^t = \\ &= \lim_{t \to +\infty} \Big(\frac{1}{2} - e^{-2t}(t + \frac{1}{2}) \Big) = \lim_{t \to +\infty} \Big(\frac{1}{2} - \frac{2t+1}{e^{2t}} \Big) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$