

Esercizio 1. (10 punti) (a) Siano A e B eventi con probabilità $p(A) = 1/2$ e $p(B) = 1/3$. Si calcoli la probabilità dell'unione $A \cup B$ in ciascuno dei seguenti casi:

1. A e B sono incompatibili;
2. A e B sono indipendenti;
3. $p(A|B) = 1/4$.

(b) Il prof. B partecipa ad una crociera per singles i cui viaggiatori sono ripartiti in parti uguali tra uomini e donne; il 30% delle donne e il 20% degli uomini sono vampiri. A cena i passeggeri vengono casualmente assegnati ai tavoli, in modo che ad ogni tavolo vi siano due donne e due uomini. Qual è la probabilità che al tavolo del prof. B ci sia almeno un vampiro? (N.B. il prof. B è un uomo ma non è noto se sia o meno un vampiro).

Esercizio 2. (7 punti) ((a) Si determini equazione dell'asse e intersezioni con l'asse x della parabola \mathcal{P} di equazione $y = -x^2 + 3x$;

(b) Per ogni $0 \leq x \leq 3$, sia $A = (x, 0)$ e si consideri il **triangolo rettangolo** T_x di cui un cateto è il segmento OA (O è l'origine) ed il terzo vertice giace sulla parabola \mathcal{P} ; si determini (al variare di x) l'area massima del triangolo T_x ; si determini poi per quali $0 \leq x \leq 3$, l'area del triangolo T_x è uguale all'area della regione delimitata dalla sua ipotenusa e dalla parabola \mathcal{P} .

Esercizio 3. (8 punti) (a) Si studi il grafico della funzione reale

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^3+8}};$$

determinandone, in particolare, il dominio di definizione, massimi e minimi, asintoti.

(b) si dica se il grafico interseca la retta $y = \sqrt{3}$.

Esercizio 4. (5 punti) (a) Si dica se la funzione reale definita da $f(x) = \sin^3 x \cos x$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$), è periodica e in caso affermativo si determini il periodo minimo.

(b) Qual è il minimo numero reale a tale che $a > 0$ e $f(a) = 0$? Trovatolo, si determini la media della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, a]$.

Esercizio 5. (4 punti) In un piano cartesiano, sia P l'intersezione della retta di equazione $y = \frac{1}{2}x - 1$ con l'asse x . Si determini l'equazione di una retta passante per P che formi un angolo di $\frac{\pi}{4}$ radianti con la retta data (ce ne sono due).