Istituzioni di Algebra superiore, 2012–2013.
Esercizi per l'esame

GENERALE

Esercizio 1 Sia G un gruppo finito e $H, K \leq G$, tali che $(|G:H|, |G:K|) = 1$; si provi che $G = HK$.

Esercizio 2 Siano H e K gruppi finiti con $(|H|, |K|) = 1$, e sia $G = H \times K$. Si provi che $Aut(G) = Aut(H) \times Aut(K)$.

Esercizio 3 Sia $\mathbb{Q}$ il gruppo additivo dei razionali e sia $N \leq \mathbb{Q}$.
1) si provi che se $[\mathbb{Q} : N] < \infty$ allora $N = \mathbb{Q}$;
2) si provi che se N è finitamente generato allora è ciclico;
3) si provi che se G/N è finitamente generato allora $N = \mathbb{Q}$.

Esercizio 4 Fissato un numero primo p, sia C_{p^∞} il p-gruppo di Prüfer.
1) Si provi che per ogni $x \in C_{p^\infty}$ ed ogni $k \geq 1$ esiste $y \in C_{p^\infty}$ tale che $y^k = x$.
2) Sia $H \leq C_{p^\infty}$. Si provi che $H = C_{p^\infty}$ oppure H è un gruppo ciclico finito.
3) Sia H un sottogruppo proprio di C_{p^∞}. Si provi che $C_{p^\infty}/H \simeq C_{p^\infty}$.
4) Si trovi un sottogruppo H di $\mathbb{Q}$ tale che $H/\mathbb{Z} \simeq C_{p^\infty}$.

Esercizio 5 Sia G il prodotto semidiretto (interno) $G = N \rtimes H$. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
1) $H^g \cap H = 1$ per ogni $g \in G \setminus H$;
2) $[a, h] \neq 1$ per ogni $1 \neq a \in N$ e $1 \neq h \in H$.

AZIONI E TEOREMI DI SYLOW

Esercizio 6 Siano p, q numeri primi distinti, con $p > q$. Sia G un gruppo di ordine p^2q^2, e P è un p-sottogruppo di Syolw di G. Si provi che $P \trianglelefteq G$ oppure $p = 3$ e $|Z(G)| = 3$. Assumendo quindi $q|p-1$ si costruisca un gruppo di ordine p^2q^2 il cui centro è identico.

Esercizio 7 Sia G un gruppo di permutazioni transitivo su Ω. Sia $N \trianglelefteq G$ e sia $\Delta = \{x^N \mid x \in \Omega\}$ l'insieme delle orbite di N. Si provi che G opera transitivamente su Δ. Si concluda che tutte le N-orbite su Ω hanno la stessa lunghezza.

Esercizio 8 Sia G un gruppo finito e p un numero primo che divide $|G|$. Si provi che

$$|\{g \in G \mid g^p = 1\}| \equiv 0 \pmod p.$$

Esercizio 9 Sia $G = GL(3,2)$ il gruppo delle matrici invertibili di ordine 3 su un campo con due elementi. Si provi che esiste un omomorfismo iniettivo $G \to S_7$. Sapendo che A_7 è il solo sottogruppo normale proprio non banale di S_7 si provi che G è semplice.

Esercizio 10 Sia P un 3-sottogruppo di Sylow di S_6. Si provi che $N_G(P) \simeq S_3 \wr C_2$.

GRUPPI LIBERI E PRESENTAZIONI

Esercizio 11 Sia F un gruppo libero e sia $1 \neq a \in F$.
1. Si provi che $C_F(a)$ è ciclico.
2. Si provi che esiste $n \geq 1$ tale che per ogni $m > n$ non esiste alcun $b \in F$ tale che $b^m = a$.

Esercizio 12 Sia F un gruppo libero su X, e sia $\alpha \in Aut(F)$ tale che $X^\alpha = X$. Si provi che se $C_F(\alpha) \cap X = \emptyset$, allora $C_F(\alpha) = 1$.

Esercizio 13 Siano $a, b \in \mathbb{N}$ diversi da 0 e coprimi, e sia

$$G = \langle x, y \mid x^{-1}y^{-1}xy^{a+1} = 1,\ y^{-1}x^{-1}yx^{b+1} = 1 \rangle.$$

Si provi che $G = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \simeq C_b \times C_a$ (prodotto diretto di gruppi ciclici).

Esercizio 14 Sia G un gruppo una cui presentazione ha n generatori e s relazioni. Si provi che se $s < n$, G è infinito. [sugg.: osservare che se F_r è il gruppo libero di rango r allora $F_r/F_r' \simeq \mathbb{Z}^r$]

Esercizio 15 $D = \langle y \rangle \rtimes \langle x \rangle$, con $|y| = \infty$, $|x| = 2$ e $y^x = y^{-1}$, il gruppo diedrale infinito, e poniamo $z = xy$. Si descriva il grafo di Cayley $\Gamma = \Gamma[D, T]$ con $T = \{x, y\}$. Sia quindi $A = Aut(\Gamma)$ (quindi $D \leq A$ mediante la rappresentazione per moltiplicazione a sinistra). Sia v un vertice di Γ, e ia $H = \{\alpha \in A \mid v\alpha = v\}$ lo stabilizzatore in A di v, Si provi che $|H| = 2$. Si concluda che $DH = A$, e dunque, in particolare, che $D \trianglelefteq A$

GRUPPI FINITAMENTE GENERATI E CRESCITA

Esercizio 16 Un gruppo G soddisfa la *condizione di massimo* sui sottogruppi (abbreviato, Max) se ogni catena $H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots$ di sottogruppi di G è finita (cioè esiste $n \geq 0$ tale che $H_i = H_n$ per ogni $i \geq n$).

(a) Sia G un gruppo, si provi G soddisfa Max se e solo se ogni sottogruppo di G è finitamente generato.

(b) Sia G un gruppo e $N \trianglelefteq G$. Si provi che G soddisfa Max se e soltanto se N e G/N soddisfano Max.

(c) Sia A un gruppo abeliano. Si provi che A soddisfa Max se e soltanto se è finitamente generato.

Esercizio 17 Si provi che un gruppo risolubile finitamente generato e periodico è finito.

Esercizio 18 Si determini la funzione di crescita, rispetto al sistema di generatori $\{x, y\}$, del gruppo diedrale infinito $D = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1\rangle$.

Esercizio 19 Sia G un gruppo f.g. a crescita polinomiale. Si provi che ogni sottogruppo finitamente generato ed ogni quoziente di G hanno crescita polinomiale.

Esercizio 20 Sia G un gruppo finitamente generato e sia $H \leq G$ di indice finito: si provi che se X e Y sono sistemi finiti di generatori, rispettivamente, di G e di H, allora $\gamma_G^X \sim \gamma_H^Y$ (in particolare, se H ha crescita polinomiale, allora anche la crescita di G è ;polinomiale).

Esercizio 21 Si descriva il sottogruppo di $Aut(T_2)$ generato dagli automorfismi ricorsivamente definiti

$$\alpha(\alpha, \tau) \qquad \beta = (\tau, \beta)$$

dove $\tau = (0\ 1)$.