Matematica - Musica

# Il codice di Sarngadeva

È oggi riconosciuto da molti (vedi, ad esempio, Knuth [3]) come diverse nozioni combinatorie di base (quali il sistema binario, il triangolo di Tartaglia-Pascal, i numeri di Fibonacci) siano state di fatto scoperte da studiosi indiani, in buona parte per risolvere problemi di enumerazione legati alla poesia o alla musica, molti secoli prima che venissero studiate in Europa. In questa nota illustriamo - col linguaggio matematico attuale ma, spero, senza appesantire troppo la trattazione - un notevole esempio, tratto da uno dei testi fondamentali della musicologia indiana antica, il *Sangitaratnakara* (”La miniera delle gemme delle musica”[1]); scritto da Sarngadeva in un periodo che viene collocato tra il 1210 e il 1247.
Si tratta di un algoritmo mediante il quale Sarngadeva enumera tutte le possibili permutazioni delle sette note fondamentali della musica indiana:

$$Sa,\ Re,\ Ga,\ Ma,\ Pa,\ Dha,\ Ni \tag{1}$$

Il numero delle permutazioni possibili è dunque $7! = 5040$. Sarngadeva si propone appunto di descrivere un metodo semplice che ad ogni tale permutazione assegni un numero da 1 a 5040; e che, viceversa, sia in grado di risalire, partendo dal numero, alla permutazione ad esso assegnata. L'algoritmo opera mediante il triangolo *Khandameru*:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 |
| | 0 | 4 | 12 | 48 | 240 | 1440 |
| | | 0 | 18 | 72 | 360 | 2160 |
| | | | 0 | 96 | 480 | 2880 |
| | | | | 0 | 600 | 3600 |
| | | | | | 0 | 4320 |
| | | | | | | 0 |

Nella prima riga, dopo lo 0, compaiono nell'ordine i fattoriali $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $\ldots 6! = 720$; nella seconda riga il prodotto di questi per 2 a partire da $2 \cdot 2!$; nella terza il loro prodotto per 3 a partire da $3 \cdot 3! = 18$; e così via.

[1] Tradotto anche ”Oceano della musica”: il titolo originale, infatti, risulta dalla fusione della parola *Sangit* (musica) con *Ratnakara*, che in sanscrito significa (vedi [2]) sia ”miniera di gemme” che ”oceano”.

Sembra di capire - dalla traduzione inglese - che Sarngadeva immagina il Khandameru come un tavoliere su quale vengono collocate delle pedine: precisamente, una pedina per ogni colonna del triangolo. Infatti, non è difficile - ora che lo si vede - dimostrare che *ogni numero naturale compreso tra* 0 *e* 5039 *si scrive* <u>in modo unico</u> *come somma di sei numeri presi uno in ciascuna delle colonne del triangolo di sopra.*

Ad esempio,

$$3115 = 1 + 0 + 18 + 96 + 120 + 2880 \tag{2}$$

È chiaro che questo fatto non dipende dal numero 7. Per generalizzarlo introduciamo, per ogni $1 \leq n \in \mathbb{N}$, quella che chiameremo la *Matrice di Sarngadeva* (di ordine $n$); ovvero la matrice con $n$ righe e $n$ colonne, i cui elementi, per ogni $1 \leq i, j \leq n$, sono dati da

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \geq j \\ i \cdot (j-1)! & \text{se} \quad i < j \end{cases} \tag{3}$$

Si può ora provare per esercizio il seguente fatto.

**Teorema 1** *Sia $2 \leq n \in \mathbb{N}$; allora ogni $0 \leq k \leq n! - 1$ si scrive in modo unico come somma*

$$k = s_{i_1 1} + s_{i_2 2} + \ldots + s_{i_n n}$$

*dove, per ogni $1 \leq j \leq n$, $i_j \leq j$ e $s_{i_j j}$ è il corrispondente elemento della matrice di Sarngadeva di ordine $n$.*
*In altre parole, ogni $0 \leq k \leq n! - 1$ si scrive in modo unico come somma*

$$k = k_1 \cdot 1! + k_2 \cdot 2! + \ldots + k_{n-1} \cdot (n-1)! \tag{4}$$

*con $0 \leq k_i \leq i$, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

[Per la dimostrazione, si può procedere per induzione su $n$; l'affermazione essendo banale per $n = 2$. Sia $n \geq 3$ e $k < n!$; se $k < (n-1)!$ si applica l'ipotesi induttiva, altrimenti si divide $k$ per $(n-1)! \ldots$]

A questo punto osserviamo che il numero di elementi $\neq 0$ nella matrice di Sarngadeva di ordine $n$ è uguale a

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2} \tag{5}$$

(nel caso $n = 7$ si ha 21); numero che coincide con quello delle distinte trasposizioni - che in questa nota chiameremo *scambi* - su un insieme con $n$ elementi. Ricordando che ogni permutazione si ottiene mediante una successione di scambi (cioè un prodotto di trasposizioni), l'algoritmo di Sarngadeva comincia a delinearsi nel nostro animo.
Lo descriveremo esplicitamente nel caso originale di permutazioni di 7 oggetti e, per rendere più scorrevole la trattazione, rimpiazziamo le note in (1) con l'insieme di numeri interi $\{1, 2, \ldots, 7\}$; rappresenteremo ciascuna permutazione $\sigma$ di tale insieme mediante la sequenza delle sue immagini

$$\sigma(1) \; \sigma(2) \; \sigma(3) \; \sigma(4) \; \sigma(5) \; \sigma(6) \; \sigma(7)$$

(sequenze che - di fatto e con abuso di notazione - chiameremo *permutazioni* della sequenza base 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Assegneremo ad ogni tale permutazione un numero da 0 a 5039 (dando valore 0 alla sequenza base, cioè alla permutazione identica). Per farlo, consideriamo un triangolo che abbia le stesse caselle del Khandameru, riempendo quelle che non giacciono sulla diagonale con tutti gli scambi distinti dell'insieme $\{1, \ldots, 7\}$, ordinati secondo la maniera illustrata dalla figura seguente:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| i | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| | i | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| | | i | 34 | 35 | 36 | 37 |
| | | | i | 45 | 46 | 47 |
| | | | | i | 56 | 57 |
| | | | | | i | 67 |
| | | | | | | i |

Nelle caselle sulla diagonale, che corrispondono a quelle con 0 nel Khandameru, abbiamo scritto una $i$, che stà per *identità*, e segnala che, per la colonna di appartenenza, non viene effettuato - nel senso che vedremo subito - alcuno scambio.

La procedura per risalire da ogni numero $0 \leq k \leq 5039$ alla permutazione cui è assegnato è ora semplice:

- si scrive il numero come la somma di numeri presi dalle colonne del Khandameru, si considerano le caselle corrispondenti a tali numeri, e quindi gli scambi che stanno nelle medesime caselle del triangolo degli scambi; la permutazione cercata si ottiene componendo tali scambi da sinistra a destra.

Per esempio, le caselle degli scambi corrispondenti al numero 3115, come decomposto in (2), sono quelle ombreggiate in figura. E la permutazione a cui è associato tale numero è la composizione (12)(34)(45)(16)(37) (si osservi che, al secondo passo, abbiamo saltato la $i$ che denota "nessuno scambio"); questa composizione la possiamo intendere come la sequenza ottenuta mediante la successione (da sinistra a destra) degli scambi a partire dalla sequenza base $1, 2, \ldots, 7$: viene

$$2,\ 6,\ 5,\ 7,\ 4,\ 1,\ 3.$$

Il motivo matematico per cui, in questo modo, si ottengono tutte le possibili permutazioni, risiede nel fatto che *ogni permutazione dell'insieme* $\{1, 2, \ldots, 7\}$ *si decompone in modo unico come la composizione (da sinistra a destra secondo l'ordine delle colonne)*

*di scambi, uno per ciascuna colonna del triangolo degli scambi* (eventualmente lo "scambio non-scambio" $i$).
Anche questo si generalizza ad numero qualsiasi $n$ di elementi sui quali permutare. Volendo enunciare questo in modo formale si ha:

**Teorema 2** *Sia $n \geq 2$. Allora ogni permutazione $\sigma$ dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ si decompone in modo unico come un prodotto di $n - 1$ scambi*

$$\sigma = (i_2\ 2)(i_3\ 3) \ldots (i_n\ n)$$

*dove $i_j \leq j$, per ogni $j = 2, \ldots, n$.*

Ragionando per induzione su $n$, anche questa dimostrazione non è difficile. Di fatto è implicita nella procedura fornita da Sarngadeva per associare ad ogni permutazione un numero, che ci accingiamo a descrivere.

Prima, osserviamo che, nel triangolo degli scambi, in ogni casella è collocato lo scambio che corrisponde proprio agli indici di riga e di colonna della tabella stessa. La tabella degli scambi, quindi, non è strettamente necessaria, ed infatti Sarngadeva non ne fa cenno: noi l'abbiamo introdotta per rendere più trasparente la ragione matematica che rende corretto l'algoritmo. Illustriamo ora tale algoritmo con un esempio, senza riferirci alla seconda tavola e seguendo così più da presso le indicazioni di Sarngadeva (che, almeno nella traduzione inglese, non sono chiarissime).

Supponiamo dunque di voler trovare il numero da 0 a 5039 assegnato alla permutazione

5 3 1 6 7 4 2

ed ecco ciò che dobbiamo fare:

- si comincia da destra: poiché il numero che compare al settimo posto è 2, si mette un gettone nella seconda casella (partendo dall'alto) della settima colonna del Khandameru, che corrisponde al numero 1440 (e allo scambio (27)).
- si "mette a posto" il 7 (cioè lo si scambia con il 2) ottenendo la sequenza

5 3 1 6 2 4 7

e si guarda ora al sesto posto: poiché vi compare il 4 si pone un gettone sulla quarta casella della sesta colonna del Khandameru, che corrisponde al numero 480;
- si mette a posto il 6 (scambiandolo con il 4), ottenendo

5 3 1 4 2 6 7

dove al quinto posto compare 2; si pone un gettone sulla seconda casella della quinta colonna del Khandameru, che corrisponde al numero 48;
- e così via; osserviamo che, al passo successivo, al quarto posto compare il numero 4 che è "al suo posto": sulla quaata colonna del Khandameru si porrà il gettone sulla diagonale, che corrisponde a 0.
Al termine (dopo cioè sei passi), arrivati alla sequenza base $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, si fa la somma dei numeri delle caselle in cui c'è il gettone e si ottiene il numero della permutazione. Nel nostro esempio

$$1440 + 480 + 48 + 0 + 2 + 1 = 1971.$$

[si noti che questo algoritmo trova anche - dal punto di vista moderno - la fattorizzazione della permutazione come prodotto (12)(13)(25)(46)(27)]

## Bibliografia


[1] Sarngadeva, *Sangitaratnakara*. Trad. inglese di R. K. Shringy .

[2] Giovanni Piana, *La serie delle serie dodecafoniche e il triangolo di Sarngadeva.* De Musica 2000.

[3] Donald E. Knuth, *The art of computer programming.* Vol. 4.