

Corso di Laurea in Matematica
I compito di ALGEBRA I
10 gennaio 2014

Esercizio 1. (4 punti) Siano $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $d = (n, m)$. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\alpha n + \beta m = d.$$

Si provi che $(\alpha, \beta) = 1$.

Esercizio 2. (10 punti) Sull'insieme

$$A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

si definisca una relazione \sim ponendo, per ogni $f, g \in A$

$f \sim g$ se esiste $0 < a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [-a, a]$

1. Si provi che \sim è una relazione di equivalenza su A .
2. Si provi che porre, per $[f]_{\sim} \in A / \sim$,

$$\phi([f]_{\sim}) = f(0)$$

definisce una funzione $\phi : A / \sim \rightarrow \mathbb{R}$.

3. Si provi che la funzione ϕ è suriettiva, ma non iniettiva.

Esercizio 3. (11 punti) Sull'insieme

$$P = \{p^n \mid p, n \in \mathbb{N}, p \text{ primo}\}$$

si definisca una relazione \trianglelefteq ponendo, per $p^n, q^m \in P$,

$$p^n \trianglelefteq q^m \text{ se } p < q \text{ oppure } \begin{cases} p = q \\ n \mid m \end{cases}$$

1. Si provi che \trianglelefteq è una relazione di ordine su P . Si dica se (P, \trianglelefteq) è un insieme totalmente ordinato.
2. Si determinino eventuali elementi massimali, minimali, massimi e minimi in (P, \trianglelefteq) .
3. Sia $Q = \{2^2, 3^3, 3^4\}$. Si determinino, se esistono, $\inf_P(Q)$ e $\sup_P(Q)$.

Esercizio 4. (7 punti) Si risolva la seguente congruenza in \mathbb{Z} :

$$x^{20} + 4x^{19} \equiv x - 4 \pmod{35}.$$