Corso di Laurea in Matematica
Corso di ALGEBRA I
prima prova intermedia – 10 gennaio 2018

Esercizio 1. (4 punti) Si provi che per ogni $n \geq 2$, si ha

$$\sum_{i=2}^{n} \left[6\binom{n}{2} + 1 \right] = n^3 - 1.$$

Esercizio 2. (4 punti) Si risolva in $\mathbb{C}$ l'equazione $x^3 + 1 = i$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica $(a + ib)$, in forma trigonometrica e in forma esponenziale.

Esercizio 3. (10 punti) Sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca la relazione ω ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b)\omega(c, d) \text{ se } ad^2 - b^2c = 0.$$

1. Si provi che ω è una relazione d'equivalenza su A.
2. Si provi che l'insieme quoziente A/ω è infinito.
3. Si dica se porre, per ogni $(a, b) \in A$,

   $$[(a, b)]_\omega \mapsto a + ib$$

   fornisce una buona definizione per una funzione $A/\omega \to \mathbb{C}$.

Esercizio 4. (10 punti) Sull'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ si definisca la relazione $\triangleleft$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$X \triangleleft Y \text{ se } X \subseteq Y \text{ e } Y \setminus X \text{ è finito.}$$

1. Si provi che $\triangleleft$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e si dica se è totale.
2. Si dica se l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangleleft)$ ha elementi minimali e/o minimi.
3. Posto $\mathcal{B}_{12} = \{\mathbb{N} \setminus \{n\} \mid n \in \mathbb{N},\ n \leq 12\}$, si determini, se esiste, $\inf(\mathcal{B}_{12})$ in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangleleft)$.

Esercizio 5. (7 punti) Si risolva in $\mathbb{Z}$ il seguente sistema alle congruenze:

$$\begin{cases} x^{30} + x^{29} + x^{28} \equiv 1 \pmod{5} \\ (32x)^{32} \equiv 32 \pmod{7} \end{cases}$$