Corsi di Laurea in Matematica. Esame di Algebra I.
Secondo compito - 4 maggio 2015

Esercizio 1. (7 punti) Siano R un anello e I, J ideali di R; si ponga

$$L(I, J) = \{x \in R \mid xI \subseteq J\}$$

dove $xI = \{xy \mid y \in I\}$.

(1) Si provi che $L(I, J)$ è un ideale di R,
(2) Siano $R = \mathbb{Z}$, $1 < n, m \in \mathbb{N}$; si provi che

$$L(n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}) = \frac{m}{(n, m)}\mathbb{Z}.$$

Esercizio 2. (7 punti) Sia $A = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ l'anello delle funzioni da $\mathbb{Z}$ a $\{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e si consideri la funzione $\phi : A \to A$, dove, per ogni $f \in A$, $\phi(f)$ è definita da

$$\phi(f)(z) = f(2z) \qquad \text{per ogni} \quad z \in \mathbb{Z}.$$

(1) Si provi che ϕ è un omomorfismo suriettivo;
(2) si determini il nucleo $K = \ker(\phi)$ e l'immagine inversa $\phi^{-1}(K)$.

Esercizio 3. (7 punti) Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss. Si dica se l'anello quoziente $E = \mathbb{Z}[i]/(13)$ è un campo; si dica quindi quali sono gli ideali di E.

Esercizio 4.(10 punti) Sia p un numero primo positivo; in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$ si consideri

$$f_p = x^p - \overline{11}x^{p-1} + \overline{11}x - \overline{11}$$

(1) Si provi che se $p \neq 3$ allora f_p ha una radice in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
(2) Posto $p = 5$ si decomponga f_5 come prodotto di irriducibili in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$.
(3) Posto $p = 3$ sia $E = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]/(f_3)$; si dica se E è un campo e qual è il suo ordine; in E si calcoli quindi $(x + (f_3))^{-1}$.

Esercizio 5*(4 punti) Sia A un dominio ad ideali principali e $\phi : A \to A$ un omomorfismo suriettivo; si provi che ϕ è un isomorfismo.