Corso di Laurea in Matematica

II compito di ALGEBRA I

2 maggio 2012

Esercizio 1. (8 punti) Siano

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_{11} \right\} \qquad \text{e} \qquad I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$$

1. Si provi che A è un anello e che I è un ideale di A.
2. Si determinino i divisori dello zero e gli invertibili dell'anello quoziente A/I.

Esercizio 2. (10 punti) Sia

$$I = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x] \ : \ a_0 \in 18\mathbb{Z}\} .$$

1. Si provi che I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$.
2. Si stabilisca se A è primo e/o principale.
3. Determinare gli ideali massimali di $\mathbb{Z}[x]$ che contengono I.
4. Determinare la caratteristica dell'anello quoziente A/I.

Esercizio 3. (10 punti) Si provi che $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ non è un dominio a fattorizzazione unica. Si trovi un elemento irriducibile, ma non primo, di $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$. Si determini una coppia di elementi di $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ che non ammette massimo comun divisore in $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$.

Esercizio 4. (4 punti) Siano $f = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, $g = x^3 - x^2 - x + 1$ e sia $I = (f, g)$ l'ideale generato da f e g in $\mathbb{Q}[x]$. Si trovi un elemento nilpotente non nullo dell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$.