Corso di Laurea in Matematica

II compito di ALGEBRA I

7 maggio 2014

Esercizio 1. (10 punti) Sia $A = \frac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{21\mathbb{Z}}$.

1. Si determini $U(A)$.
2. Si determini $char(A)$.
3. Si provi che $I = \{(3a + 12\mathbb{Z}, 3b + 21\mathbb{Z}) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un ideale di A e si dica quindi se è primo e/o massimale.

Esercizio 2. (13 punti) Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

1. Si provi che A è un sottoanello di $M(2 \times 2, \mathbb{Q})$.
2. Si provi che ogni elemento diverso da 0 di A è invertibile oppure un divisore dello zero.

Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \to A$ l'omomorfismo definito da

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per ogni $a \in \mathbb{Q}$ (tale omomorfismo esiste unico per il Principio di sostituzione).

3. Si determini $\phi(ax^n)$, per $a \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}$.
4. Si determini $\ker(\phi)$ (se ne trovi un generatore).
5. Si dica se ϕ è suriettivo.

Esercizio 3. (10 punti) Per ogni numero primo positivo p sia

$$f_p = x^3 - 6px + p^2 \in \mathbb{Q}[x].$$

1. Si dica per quali primi p l'anello $\mathbb{Q}[x]/(f_p)$ è un campo.
2. Si dica per quali primi p si ha che $x + p + (f_p)$ non è un elemento invertibile di $\mathbb{Q}[x]/(f_p)$.
3. Si determinino tutti gli ideali dell'anello $\mathbb{Q}[x]/(f_5)$.