Corso di Laurea in Matematica
Corso di ALGEBRA I
seconda prova intermedia – 23 aprile 2018

Esercizio 1. (8 punti) Sia $b \in \mathbb{Z}$ un intero fissato, e sia

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & yb \\ y & x \end{pmatrix} \Big| x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

1. Si provi che A è un sottoanello dell'anello delle matrici $M(2, 2; \mathbb{Q})$, e che è commutativo.
2. Si provi che A è un dominio d'ntegrità se e soltanto se b non è un quadrato in $\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. (10 punti) Sia A un anello commutativo, I un ideale di A e $b \in A$ un elemento fissato. Sia quindi

$$X(I, b) = \{a \in A \mid ab^n \in I \text{ per qualche intero } n \geq 0\}.$$

1. Si provi che $X(I, b)$ è un ideale di A contenente I.
2. Nell'anello $\mathbb{Z}$ si determini $X(24\mathbb{Z}, 10)$.
3. Si provi che se I è un ideale primo, allora $X(I, b) = A$ oppure $X(I, b) = I$.

Esercizio 3. (8 punti) Per ogni numero intero a scriviamo $\overline{a} = a + 3\mathbb{Z}$ (la riduzione modulo 3 di a), e consideriamo l'anello quoziente

$$A_a = \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x^3 - \overline{a}x + \overline{a}^2)}$$

1. Si dica per quali $a \in \mathbb{Z}$ A_a è un campo.
2. Nel caso $a = 7$ si trovino gli ideali massimali di A_7 e si dica se esiste un omomorfismo $A_7 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. (8 punti) Si consideri il campo $E = \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2+x+1)}$ (non occorre provare che è un campo).

1. Si dica per quali interi $p \geq 0$ esiste un elemento $a \in E$ tale che $a^2 = p$ oppure $a^2 = -p$.
2. Sia t un'indeterminata; in $E[t]$ si fattorizzi in prodotto di irriducibili il polinomio $x^4 - 9$.