Corso di laurea in Matematica, Università di Firenze
Esame di Algebra I - prova scritta del 7 maggio 2018

Esercizio 1 (4 punti). Si provi che per ogni intero $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{3n^2-n}{2}.$$

Esercizio 2 (9 punti). Sull'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca la relazione $\rtimes$ ponendo, per ogni $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(a,b) \rtimes (c,d) \quad \text{se} \quad \sqrt{2}(a-c) \leq d-b.$$

(1) Si provi che $\rtimes$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e si dica se è totale.

(2) Si dica se in $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \rtimes)$, il sottoinsieme $A = \{(a,b) \mid a \geq 1, b \geq 1\}$ ha minimo, e in tal caso lo si determini.

(3) Si dica se l'insieme $B = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0,0)\} \mid (0,0) \rtimes (a,b)\}$ ha minimo, e in tal caso lo si determini.

Esercizio 3 (5 punti). Si provi che la congruenza

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} \equiv 1 \pmod{11}$$

non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.

Esercizio 4 (7 punti). Siano P, I_1, I_2 ideali di un anello A, con P primo.

(1) Si provi che se $I_1 \cap I_2 \subseteq P$ allora $I_1 \subseteq P$ o $I_2 \subseteq P$.

(2) Si provi che se A è un P.I.D. e $\{0_A\} \neq P \subseteq I_1 + I_2$, allora $I_1 + I_2 = A$ oppure $I_1 + I_2 = P$.

Esercizio 5 (8 punti). Dato un primo positivo p, si consideri l'anello

$$A_p = \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^4 - 11x^2 + 2p)}.$$

(1) Si dica per quali primi positivi p, A_p è un campo..

(2) Si determinino tutti gli ideali dell'anello A_5.