

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di **ALGEBRA I**
9 giugno 2014

Esercizio 1. (5 punti) 1. Siano A, B, C insiemi non vuoti e $f : A \rightarrow B$ una applicazione fissata. Si definisca quindi $\Phi : C^B \rightarrow C^A$, ponendo, per ogni $g \in C^B$, $\Phi(g) = g \circ f$. Si provi che se f è iniettiva allora Φ è suriettiva.

Esercizio 2. (9 punti) Sia $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Dati $x, y \in A$ si scriva $x = 2^a b$, $y = 2^c d$ con $a, c, b, d \in \mathbb{N}$ e b, d dispari; poniamo $x \triangleleft y$ se

$$\begin{cases} a \neq c \text{ e } a|c \\ \text{oppure} \\ a = c \text{ e } b \leq d \end{cases}$$

1. Si provi che \triangleleft definisce una relazione d'ordine su A .
2. Si determinino eventuali elementi massimali/minimali, massimi/minimi di (A, \triangleleft) .
3. Posto B il sottoinsieme di A costituito dai numeri pari, si determini, se esiste, $\sup_A(B)$.

Esercizio 3. (4 punti) Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo. Posto

$$a = p^2 + p + 2$$

si determini la prima cifra a destra (quella delle "unità") di a^p in base p .

Esercizio 4. (9 punti) Dato p un numero primo, si ponga $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e si consideri

$$A_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

1. Si provi che A_p è un sottoanello di $M(2 \times 2, \mathbb{Z}_p)$.
2. Si provi che l'applicazione $\beta : \mathbb{Z}_p[x]/(x^2 + 1) \rightarrow A_p$ data da

$$\beta(a + bx + (x^2 + 1)) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

è ben definita e isomorfismo di anelli.

3. Si provi che A_7 è un campo.

Esercizio 4. (5 punti) Si determinino tutti gli ideali di $\mathbb{Q}[x]$ che contengono entrambi i seguenti polinomi:

$$f_1 = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1, \quad f_2 = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6.$$