Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di ALGEBRA I

8 settembre 2014

Esercizio 1. (5 punti) 1. Siano C, D insiemi e $f : C \to D$ una applicazione.

1. Si dimostri che, per ogni $Y \subseteq C$, si ha $Y \subseteq f^{-1}(f(Y))$.

2. Si definisca l'applicazione $f^* : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(C)$ ponendo, per ogni $Y \subseteq C$,
$$f^*(Y) = f^{-1}(f(Y)) \ .$$
Si dimostri che f^* è iniettiva se e solo se f^* è l'applicazione identica su $\mathcal{P}(C)$.

Esercizio 2. (9 punti) Sull'insieme $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per $a, b \in A$, con $a = p_1p_2 \cdots p_n$ e $b = q_1q_2 \cdots q_m$ fattorizzazioni in primi,
$$a \trianglelefteq b \quad \text{se} \quad n < m \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} n = m \\ a \leq b \end{cases}$$

1. Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione d'ordine su A.

2. Si determinino eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo di A.

3. Si determinino (se esistono) l'estremo superiore e l'estremo inferiore in A dell'insieme P degli interi primi positivi.

Esercizio 3. (7 punti) Sia I l'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $\alpha = 6 + 2i$ e $\beta = 8 + 4i$.

1. Si determinino gli ideali dell'anello quoziente $A = \mathbb{Z}[i]/I$.

2. Si dica se A è un dominio di integrità.

Esercizio 4. (9 punti) Dato un numero primo p, siano
$A = \left\{ \frac{n}{p^m} \in \mathbb{Q} \ : \ n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \left\{ \frac{n}{b} \in \mathbb{Q} \ : \ n, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}$.

1. Si provi che A e B sono sottoanelli di $\mathbb{Q}$ (e quindi anelli).

2. Si determinino la caratteristica e gli elementi invertibili dell'anello $A \times B$.

3. Si provi che non esiste alcun omomorfismo $\mathbb{Q} \to A \times B$.