Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di ALGEBRA I - a.a. 2013/2014

14 gennaio 2015

Esercizio 1 (4 punti) Siano A, B insiemi, $f : A \to B$ e $g : B \to A$ applicazioni tali che f è iniettiva e $f \circ g = \iota_B$. Si provi che $f = g^{-1}$.

Esercizio 2 (9 punti) Per ogni $n \geq 0$ poniamo $I_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Sull'insieme $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ si definisca la relazione ω ponendo, per $f, g \in A$,

$$f \omega g \quad \text{se esiste } k \in \mathbb{N} \text{ tale che } f(I_n) = g(I_n) \text{ per ogni } k \leq n \in \mathbb{N}$$

1. Si provi che ω è una relazione d'equivalenza su A.
2. Si provi che se $f \in A$ è suriettiva allora tale è ogni elemento della classe $[f]_\omega$.
3. Dire se il porre, per $f \in A$, $[f]_\omega \mapsto f(0)$ fornisce una buona definizione di un'applicazione $A/\omega \to \mathbb{N}$.

Esercizio 3 (5 punti) Siano p un numero primo positivo e $n \in \mathbb{N}$ tali che $(n, p-1) = 1$; si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : \quad & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ & x \mapsto x^n \end{aligned}$$

1. si provi che ϕ è una biezione [sugg. provare che è suriettiva];
2. si provi che se p è dispari allora $\sum_{i=1}^{p-1} i^n \equiv 0 \,(\text{mod } p)$.

Esercizio 4 (4 punti) Siano A, B un anelli commutativi, sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo, e $a \in A$. Si provi che

$$N_a = \{x \in A \mid \phi(ax) = 0_B\}.$$

è un ideale di A.

Esercizio 5 (10 punti) Sia $f(x) = x^3 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$ e sia

$$A = \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(f(x))} \,.$$

Si determinino:

1. gli ideali dell'anello A.
2. i divisori dello zero di A.
3. l'inverso dell'elemento $\alpha = x + (f(x))$ in A.