Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2013/2014
Prova scritta di ALGEBRA I - 16 febbraio 2015

Esercizio 1 (5 punti) Sia p un numero primo. Si provi che l'applicazione

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \\ a + p\mathbb{Z} \mapsto a^p + p^2\mathbb{Z} \end{array}$$

(per ogni $a \in \mathbb{Z}$) è ben definita e iniettiva. Si provi quindi che la proiezione

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ a + p^2\mathbb{Z} \mapsto a + p\mathbb{Z} \end{array}$$

è un'inversa sinistra di f.

Esercizio 2 (10 punti) Sia X un insieme finito, non vuoto, con $|X|$ pari. Per ogni $Y \subseteq X$ si ponga

$$Y_0 = \begin{cases} Y & \text{se } |\mathrm{Y}| \text{ pari} \\ X \setminus Y & \text{se } |\mathrm{Y}| \text{ dispari} \end{cases}$$

Su $\mathcal{P}(X)$ si definisca quindi la relazione $\triangleleft$ ponendo, per $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$,

$$Y \triangleleft Z \qquad \text{se} \qquad \mathrm{Y}_0 \subseteq \mathrm{Z}_0 \;\text{ e }\; |\mathrm{Y}| + |\mathrm{Z}| \equiv 0 \pmod 2 .$$

1. Si provi che $\triangleleft$ è una relazione d'ordine su $\mathcal{P}(X)$.
2. Si determinino gli elementi massimali di $(\mathcal{P}(X), \triangleleft)$.
3. Per $|X| \geq 4$ siano $a, b, c \in X$ elementi distinti, $A = X \setminus \{a\}$, $B = X \setminus \{b\}$ e $C = X \setminus \{c\}$; si dica se esiste $\sup_{(\mathcal{P}(X), \triangleleft)}\{A, B, C\}$ e, in caso affermativo, lo si determini.

Esercizio 3 (10 punti) Siano A, B un anelli commutativi e sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo. Per ogni $a \in A$ definiamo

$$N_a = \{x \in A \mid \phi(ax) = 0_B\}.$$

1. Si provi che N_a è un ideale di A per ogni $a \in A$.
2. Si provi che se esiste $a \in A$, $a \notin \ker(\phi)$ tale che $N_a > \ker(\phi)$ allora $\ker(\phi)$ non è un ideale primo di A.
3. Sia $b \in A$; si provi che $\{x \in A \mid \phi(b + x) = 0_B\}$ è un ideale di A se e solo se $b \in \ker(\phi)$.

Esercizio 4 (8 punti) In $\mathbb{Q}[x]$ si consideri $f = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ e, al variare di $a \in \mathbb{Q}$, $g_a = x^4 + ax^2 + a$.

1. Si dica quanti sono gli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/(f)$.
2. Si dica per quali $a \in \mathbb{Q}$ si ha $(f, g) \neq \mathbb{Q}[x]$.