Corso di Algebra 1
Compito del 19.01.2010

Esercizio 1. Sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiamo la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in A$:

$$(a, b) \sim (c, d) \qquad \text{se} \qquad a - c \equiv b - d \pmod 9.$$

(a) (5 punti) Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza su A;
(b) (4 punti) provare che il porre

$$f([(a, b)]_\sim) = a + 2b + 3\mathbb{Z}$$

definisce un'applicazione $f : A/\sim\ \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sull'insieme $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisca la relazione $\leq_3$ ponendo,, per ogni $a, b \in \mathbb{N}_0$,

$$a \leq_3 b \qquad \text{se} \qquad a = b \text{ oppure } b \geq 3a.$$

(a) (4 punti) Provare che $\leq_3$ è una relazione d'ordine su $\mathbb{N}_0$;

(b)(4 punti) trovare (se esistono) gli elementi minimali di $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$ e dire se esiste un minimo;

(c) (4 punti) provare che un sottoinsieme finito e non vuoto di $\mathbb{N}_0$ ha un estremo superiore in $(\mathbb{N}_0, \leq_3)$ se e solo se ha massimo;

(d)(2 punti) provare che non tutti i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{N}_0$ hanno estremo inferiore.

Esercizio 3. (7 punti) Sia $n \in \mathbb{N}$. Si risolva in $\mathbb{Z}$ la seguente congruenza

$$x^{2(n+1)} + x^{2n} + 3 \equiv 0 \pmod 5.$$