Corso di Algebra 1. 2009/2010.

Compito del 15 marzo 2010

Esercizio 1. (7 punti) Sia $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/51\mathbb{Z}$.

(a) Si determini la caratteristica dell'anello A.

(b) Si dica se A è un dominio d'integrità.

Esercizio 2. (24 punti) Si consideri l'anello

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

(1) Si provi che $(\sqrt{-3}) = \{a + b\sqrt{-3} \mid a \in 3\mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Si provi che $(\sqrt{-3})$ è un ideale primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(3) Sia $z \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$; si provi che $(z, \sqrt{-3}) = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(4) Si provi che $(\sqrt{-3})$ è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(5) Si provi che $1+\sqrt{-3}$ è un elemento irriducibile ma non primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(6) Si provi che $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ è isomorfo all'anello

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(A è un sottoanello dell'anello $M_2(\mathbb{Z})$, questo **non occorre dimostrarlo**.)