Corso di Algebra 1. 2009/2010.

Compito del 6 maggio 2010

Esercizio 1 (10 punti). Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$ si consideri l'elemento $z = 4 + 2i$.

(a) Si fattorizzi z come prodotto di irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Si determinino tutti gli ideali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(z)$.

Esercizio 2 (10 punti). Siano p un numero primo positivo, $n > 0$ un numero intero e $f = x^3 + px + p^n \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Si dica se l'anello quoziente $E = \mathbb{Q}[x]/(f)$ è un campo.

(b) Nell'anello E si determini (se esiste) l'inverso dell'elemento $x + (f)$.

Esercizio 2 (10 punti). Fissato un numero primo positivo p, sia

$$I = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x] \mid p^2 \text{ divide ogni } a_i\}.$$

(a) Si provi che I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Si dica se I è un ideale primo di $\mathbb{Z}[x]$.