Corso di Algebra I. 2009/2010.

Esame scritto del 2 febbraio 2011

Esercizio 1. (5 punti) Sia $\emptyset \neq A$ un insieme e sia B un fissato sottoinsieme di A. Si provi che l'applicazione $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, definita da

$$f(X) = (B \cap (A \setminus X)) \cup (A \setminus (B \cup X))$$

per ogni $X \in \mathcal{P}(A)$. Si provi che f è biettiva e si determini la sua inversa.

Esercizio 2. (5 punti) Determinare per quali $a \in \mathbb{Z}$ vale la seguente congruenza

$$a \cdot 5^{2448914} + 3^{a^2 \cdot 4152714} + a \cdot 2^{6667} \cdot 6^{10^{11}-1} \equiv 4 \pmod{7}.$$

Esercizio 3. (9 punti) Sia $2 \leq n \in \mathbb{N}$; nell'anello $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si consideri

$$J_n = \{(a, b) \in A \mid a - b \in n\mathbb{Z}\}.$$

(a) Si provi che J_n è un sorroanello ma non un ideale di A.

(b) Si trovi, nell'anello A, un ideale primo che non sia massimale.

Esercizio 4. (6 punti) Si provi che $2 + \sqrt{-5}$ è un elemento irriducibile ma non primo dell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Esercizio 5. (6 punti) Sia $p \geq 2$ un numero primo, e per ogni $k \in \mathbb{Z}$ sia

$$A_k = \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3 + kx + p)}$$

(a) Si dica per quali $k \in \mathbb{Z}$, l'anello A_k è un campo.

(b) Si dica per quali $k \in \mathbb{Z}$, l'elemento $x + (x^3 + kx + p)$ è invertibile in A_k.