**Corso di Algebra I. 2011/2012.**

Esame scritto del 4 febbraio 2013

**Esercizio 1.** (9 punti) Sull'insieme $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x, y \geq 2\}$ si definisca la relazione $\trianglelefteq$ ponendo $(a, b) \trianglelefteq (c, d)$ se $a \leq c$ e $b|d$.

**(a)** Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su $A$.

**(b)** Si determini gli eventuali massimo, minimo ed elementi massimali e minimali di $(A, \trianglelefteq)$.

**(c)** Sia $D = \{(x, y) \in A : x + y = 10\}$. Si determinino, se esistono, $\inf_A(D)$ e $\sup_A(D)$.

**Esercizio 2.** (4 punti) Si trovi una soluzione intera del seguente sistema misto.

$$\begin{cases} x^8 - y^6 \equiv 0 \pmod{35} \\ x + y = 33 \end{cases}$$

**Esercizio 3.** (8 punti) Siano $M_2(\mathbb{Z})$ l'anello delle matrici $2 \times 2$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$, $p$ un numero primo e

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \middle| \ p \text{ divide } b \right\}, \quad B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \middle| \ p \text{ divide } b, d \right\}$$

**(a)** Si provi che $A$ è un sottoanello di $M_2(\mathbb{Z})$;

**(b)** si provi che $B$ è un ideale di $A$ ma non di $M_2(\mathbb{Z})$;

**(c)** si dica se $B$ è un ideale massimale di $A$.

**Esercizio 4.** (4 punti) Si determini per quali $b \in \mathbb{Q}$ si ha, nell'anello $\mathbb{Q}[x]$,

$$(x^3 + bx^2 + 3, x^3 + 3x^2 + b) = 1.$$

**Esercizio 5.** (7 punti) Siano $F$ un campo, $q \in F[x]$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$ e $A = F[x]/(q^n)$. Sia $D$ l'insieme dei divisori dello zero nell'anello $A$ e $I = D \cup \{0\}$.

**(a)** si provi che se $q$ è irriducibile in $F[x]$ allora $I$ è un ideale massimale di $A$;

**(b)** si provi che se $q$ non è irriducibile e $q \neq 0$, allora $I$ non è un ideale di $A$.