Corso di Algebra 1. 2009/2010.

Esame scritto del 8 Luglio 2010

Esercizio 1. (6 punti) Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definita da, per ogni $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$f(a, b) = (a + b, a - b).$$

(a) Si provi che f è iniettiva.

(b) Si provi che $Im(f) = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod 2\}$.

Esercizio 2. (7 punti) Fissato un intero $n \geq 1$, su $\mathbb{Z}$ si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \sim b \quad \text{se} \quad \begin{cases} n \mid a - b & \text{per} \quad a, b \geq 3 \\ 2n \mid a - b & \text{per} \quad a, b < 3 \end{cases}$$

(a) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su $\mathbb{Z}$.

(b) Si determini la cardinalità dell'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\sim$.

Esercizio 3. (9 punti) Sia X un insieme non vuoto e sia

$$A = \{f \mid f : X \to \mathbb{Z} \text{ applicazione}\}$$

l'anello delle applicazioni da X in $\mathbb{Z}$ (con le usuali operazioni di somma e prodotto). Sia $a \in X$ un elemento fissato, e $g \in A$ l'applicazione definita da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = a \\ 1 & x \neq a \end{cases}$$

Infine, sia $I = (g)$ l'ideale generato da g in A.

(a) Si provi se I è un ideale massimale e/o un ideale primo di A.

(b) Si determinino gli ideali di A che contengono I.

Esercizio 4. (8 punti) Nell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}_5[x]$ si consideri l'ideale $I = (x^3 + x + \bar{1})$.

(a) Si dica se l'anello quoziente $A = \mathbb{Z}_5[x]/I$ è un campo e si dica quanti elementi contiene.

(b) Nell'anello A determinare l'inverso dell'elemento $x^2 + \bar{1} + I$.