Corso di Algebra I. 2011/2012.

Esame scritto del 11 giugno 2012

Esercizio 1. (9 punti) Dato un intero $n \geq 3$, sia $I_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Su $A = I_n \times I_n$ si definisca una relazione $\trianglelefteq$ ponendo, per $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b) \trianglelefteq (c, d) \qquad \text{se} \qquad a(a - c) = 0 \text{ e } b \leq d\,.$$

1. Si provi che $\trianglelefteq$ è una relazione di ordine su A.
2. Si determinino gli elementi massimali/minimali e/o massimo/minimo (se esistono) dell'insieme parzialmente ordinato $(A, \trianglelefteq)$.
3. Si determini (se esiste) l'estremo inferiore in A dell'insieme $B = \{(i, 2) \ : \ 1 \leq i \leq n\}$.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $\Delta(1) = 5$ e per ogni $n \geq 1$ si ponga $\Delta(n + 1) = 5^{\Delta(n)}$. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$4^{\Delta(n)} \equiv 1 \pmod{11}$$

[si tenga presente che $4^5 \equiv 1 \pmod{11}$].

Esercizio 3. (6 punti) Sia R un dominio di integrità e sia $a \in R$ un elemento *non nullo e non invertibile*; si provi che $\{0\} \neq (a^2) \neq (a)$. Si deduca che un dominio d'integrità con un numero finito di ideali è un campo.

Esercizio 4. (12 punti) Sia $\psi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ definito da $\psi(f) = (f(1), f(i))$.

1. Si provi che ψ è un omomorfismo di anelli.
2. Si determini un generatore di $I = Ker(\psi)$.
3. Si dica se $1 + x + x^2 + I$ è invertibile in $\mathbb{Q}[x]/I$ e, se lo è, se ne determini l'inverso.
4. Si determinino gli elementi nilpotenti di $\mathbb{Q}[x]/I$.