Corso di Algebra 1. 2009/2010.

Esame scritto del 14 Giugno 2010

Esercizio 1. (9 punti) Sull'insieme $\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia definita la relazione $\prec$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in \Omega$,

$$(a, b) \prec (c, d) \quad \text{se} \quad \begin{cases} a + b \leq c + d \\ a - b \leq c - d \end{cases}$$

(a) Si provi che $(\Omega, \prec)$ è un insieme parzialmente ordinato;

(b) si dica se $(\Omega, \prec)$ è totalmente ordinato;.

(c) si dice se $(0, 0)$ è un elemento minimo e/o minimale di $(\Omega, \prec)$.

Esercizio 2. (4 punti) Si determinino tutti i numeri complessi α tali che

$$\alpha^6 - 2 = 0.$$

Esercizio 3. (9 punti) Si consideri

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \; a + c = b + d \right\}$$

(a) Si provi che A è un sottoanello dell'anello delle matrici $M_2(\mathbb{Z})$;

(b) si provi che l'applicazione $\phi : A \to \mathbb{Z}$, definita da

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{a + b + c + d}{2}$$

è un omomorfismo di anelli e si determini $\ker(\phi)$;

(c) si dica se $\ker(\phi)$ è un ideale primo di A.

Esercizio 4. (4 punti) Si provi che per ogni $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ si ha

$$(f, g) = (f + g, f - g).$$

Si dica se la stessa proprietà vale in $\mathbb{Z}$ (invece che in $\mathbb{Q}[x]$).

Esercizio 5. (5 punti) Si determinino tutti gli elementi invertibili dell'anello quoziente

$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2 - 9)}.$$