Corsi di Laurea in Matematica. Esame di Algebra I.
Esame scritto - 16 giugno 2015

Esercizio 1. (5 punti) Sia p un numero primo fissato, e siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Posto

$$\Delta = \sum_{i=0}^{p} a^i b^{p-i},$$

si provi che $\Delta \equiv a \pmod{p}$ se $a \equiv b \pmod{p}$, mentre $\Delta \equiv a + b \pmod{p}$ nel caso in cui $a \not\equiv b \pmod{p}$.

Esercizio 2. (9 punti) Sia Ω l'insieme di tutti i punti nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ le cui coordinate sono entrambe strettamente positive: $\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in (0, +\infty)\}$. Su Ω si definisca la relazione σ ponendo, per ogni $P = (x, y), P' = (x', y') \in \Omega$,

$P\sigma P'$ *se* $P = P'$ *oppure* $y \leq y'$ *e il coefficiente angolare della retta congiungente* P *con* P' *è* ≥ 2 (con la convenzione che le rette verticali hanno ceoff. angolare $+\infty$).

(1) Si provi che σ è una relazione d'ordine su Ω e si dica se è totale.
(2) Si provi che per ogni $P, Q \in \Omega$ esiste $P \vee Q = \sup_\Omega(\{P, Q\})$.
(3) Sia $B = \{(x, y) \in \Omega \mid x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, y \geq 2x\}$; si dica se B ammette minimo e/o estremo inferiore.

Esercizio 3. (12 punti) Questioni sugli ideali primi.

(1) Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli e sia J un ideale primo di B; si provi che $\phi^{-1}(J)$ è un ideale primo di A.
(2) Sia $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots$ una catena discendente di ideali primi dell'anello A; si provi che $\bigcap_{i \geq 1} I_i$ è un ideale primo di A.
(3) Sia A un P.I.D. e siano I, J ideali primi di A; si provi che se $I \supseteq J$ allora $I = J$ oppure $J = \{0_A\}$.
(4) Nell'anello $\mathbb{Z}[x]$ si trovino due ideali primi I, J non banali, distinti, e tali che $J \supset I$.

Esercizio 4. (7 punti) Nell'anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x]$ si consideri il sottoinsieme

$$I = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(2) = f(1/2) = f(\sqrt{2}) = 0\}.$$

(1) Si provi che I è un ideale di $\mathbb{Q}[x]$.
(2) Si determinino tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Q}[x]$ che contengono I.