Corso di Laurea in Matematica. Esame di Algebra I.
Esame scritto - 15 gennaio 2016

Esercizio 1. (9 punti) (a) Siano A, B, C insiemi, si provi che

$$A\Delta B \subseteq (A\Delta C) \cup (C\Delta B).$$

(b) Sull'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ si definisca una relazione $\sim$ ponendo, per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$$X \sim Y \quad \text{se} \quad |X\Delta Y| < \infty.$$

(1) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su Ω;
(2) dati $n, m \geq 1$ si dica in quali casi si ha $n\mathbb{Z} \sim m\mathbb{Z}$;

Esercizio 2. (5 punti) Sia $p \geq 3$ un numero primo; si determini l'immagine $Im(\phi)$ dell'applicazione $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{Z}$,

$$\phi(x) = 1 + x + \cdots + x^{p-3} + x^{p-2}.$$

Esercizio 3. (5 punti) Sia $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli commutativi. Dati J ideale di B e $b \in B \setminus J$, sia $U = \{x \in A \mid \phi(x)b \in J\}$. Si provi che se J è ideale primo di B allora U è un ideale primo di A, e che se J è ideale massimale di B allora U è un ideale massimale di A.

Esercizio 4. (9 punti) Sia $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, e si considerino

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}, \qquad I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ -2a & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z}_5 \right\}.$$

(1) Si provi che A è un sottoanello commutativo di $M(2 \times 2, \mathbb{Z}_5)$; si dica se A è un campo;
(2) si provi che I è un ideale di A, e che è massimale;
(3) si provi che A non è isomorfo a $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

Esercizio 5. (5 punti) In $\mathbb{Q}[x]$ si considerino i polinomi

$$f = x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1, \quad g = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6.$$

Si stabilisca qual è il numero di ideali di $\mathbb{Q}[x]$ che contengono $\{f, g\}$.