Corso di Algebra I. 2011/2012.

Esame scritto del 17 settembre 2012

Esercizio 1. (7 punti) Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Sull'insieme di applicazioni $\Omega = \{f \mid f : \mathbb{N} \to A\}$ si definisca la relazione $\triangleleft$ ponendo, per ogni $f, g \in \Omega$,

$$f \triangleleft g \quad \text{se} \quad f(n) \leq g(n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

1. Si provi che $\triangleleft$ è una relazione d'ordine su Ω.
2. Si provi che $(\Omega, \triangleleft)$ ha elementi minimali se e soltanto se $(A, \leq)$ ha elementi minimali.

Esercizio 2. (5 punti) Si trovi il più piccolo numero primo $p \geq 2$ tale che

$$\begin{cases} p^{2222} \equiv p \pmod{11} \\ (p-2)^p \equiv 2p \pmod{23} \end{cases}$$

Esercizio 3. (12 punti) Posto $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ si considerino i polinomi $f, g \in \mathbb{F}[x]$,

$$f = (x-2)^2(x-4)(x-5), \quad g = (x-3)(x-4)(x-5)^2.$$

Sia $I = (f, g)$ l'ideale generato da f e g in $\mathbb{F}[x]$ e si ponga $A = \mathbb{F}[x]/I$.

1. Determinare tutti gli ideali di A.
2. Determinare l'ordine $|A|$ e i divisori dello zero di A.
3. Stabilire se $\alpha = x+6+I$ è un elemento invertibile di A e, in caso affermativo, determinare il suo inverso.

Esercizio 4. (7 punti) Posto, per $n \geq 2$, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, si consideri l'anello

$$A = \mathbb{Z}_{50}[x] \times \mathbb{Z}_{135}[x].$$

1. Determinare la caratteristica e il sottoanello fondamentale di A.
2. Dire se esistono omomorfismi da A nell'anello $\mathbb{Z}_{900}[x]$.