Corso di Algebra I. 2011/2012.

Esame scritto del 18 gennaio 2013

Esercizio 1. (4 punti) Sia A un insieme e $f : A \to A$ un'applicazione. Si provi che f è iniettiva se e solo se $f(X \cap Y) = f(X \cap (Y)$ per ogni $X, Y \subseteq A$.

Esercizio 2. (7 punti) Fissato un intero positivo n, siano $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $A = \{f \mid f : I \to \mathbb{Z}\}$. Su A si definisca la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $f, g \in A$,

$$f \sim g \text{ se } \mathrm{f(i) \equiv g(i) \pmod{n} \text{ per ogni } i \in I.}$$

1. Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza;
2. Si provi che l'insieme $\{f \in A \mid Im(f) \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ è un sistema di rappresentati di $A/\sim$.

Esercizio 3. (4 punti) Sia $p \neq 2$ un numero primo. Si provi che il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} x + y \equiv 0 \pmod{p} \\ xy \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$$

ammette soluzioni intere se e solo se $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Esercizio 3. (12 punti) Siano p un numero primo, $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, e $A = \{f \mid f : F \to F\}$ l'anello delle funzioni da F in sé (con le solite operazioni). Inoltre, per ogni $X \subseteq F$, sia $\mathcal{J}_X = \{f \in A \mid f(x) = 0 \ \forall x \in X\}$ (si osservi che $\mathcal{J}_\emptyset = \{0\}$)).

1. Si dica quanti sono gli elementi di A e quanti sono quelli invertibili;
2. Si provi che per ogni $X \subseteq F$, $\mathcal{J}_X$ è un ideale di A e che è principale;
3. Si dica per quali sottoinsiemi X di F $\mathcal{J}_X$ è un ideale massimale;
4. Sia I un ideale principale di A, si provi che esiste $X \subseteq F$ tale che $I = \mathcal{J}_X$.

Esercizio 4. (5 punti) Si dica per quali numeri interi a **dispari** il quoziente

$$K = \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3 + 3x + a)}$$

è un campo. In tal caso si scriva l'elemento inverso di $x + (x^3 + 3x + a)$ in K.