Corso di Algebra 1. 2009/2010.

Esame scritto del 18 maggio 2010

Esercizio 1. (7 punti) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{7+n}{2} & \text{se } n \text{ dispari} \\ \\ \frac{6-n}{2} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

(a) Si dica se f è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Se f è biettiva, si determini la sua inversa f^{-1}.

Esercizio 2. (7 punti) Sia p un numero primo fissato. Su $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiamo la relazione $\sim$ ponendo, per ogni $(a, b), (c, d) \in A$,

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{se} \quad p \text{ divide } (a - d) + (b - c).$$

(a) Si provi che $\sim$ è una relazione d'equivalenza su A.

(b) Si determini un sistema di rappresentanti per le classi di equivalenza in A modulo $\sim$.

Esercizio 3. (5 punti) Si determinino gli $a \in \mathbb{Z}$ tale che

$$24^{23^{22}} + a$$

sia divisibile per 7.

Esercizio 4. (7 punti) Siano A un anello commutativo e I un ideale di A. Per ogni $n \in N$ definiamo

$$I_n = \{a \in A \mid na \in I\}.$$

(a) Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, I_n è un ideale di A.

(b) Si provi che se $I_n = A = I_m$ per n, m coprimi, allora $I = A$.

Esercizio 5. (6 punti) Posto $f = x^4 + 6x^2 + 28 \in \mathbb{Z}[x]$, sia $\overline{f} \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]$ la riduzione di f modulo 7. Sia

$$A = \frac{(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[x]}{(\overline{f})}.$$

(a) Si dica se A è un dominio d'integrità.

(b) Si determinino tutti gli ideali di A.