

Corso di Algebra 1. 2009/2010.

Esame scritto del 23 Settembre 2010

Esercizio 1. (5 punti) Si provi che per ogni numero intero $n \geq 1$, il numero

$$\frac{(2n)!}{n!2^n}$$

è dispari.

Esercizio 2. (6 punti) Siano A, B insiemi e $f : A \rightarrow B$ un'applicazione. Si provi che le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (i) f è iniettiva;
- (ii) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ per ogni $X, Y \subseteq A$.

Esercizio 3. (10 punti) Si consideri l'anello $R = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_8$.

- (a) Si determinino i divisori dello zero e gli elementi invertibili di R .
- (b) Si determini, se esiste, un isomorfismo $\phi : R \rightarrow \mathbb{Z}_{56}$.
- (c) Si provi che $U = \{(a, \bar{0}) \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$ è un ideale di R , e si dica se è primo.

Esercizio 4. (10 punti) Sia $f = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $A = \mathbb{Q}[x]/(f)$.

- (a) Si dica se A è un campo.
- (b) Si determinino gli ideali massimali di A .
- (c) Si determini, se esiste, un elemento $b \in A$ tale che $b^2 = 0$.