Corso di Laurea in Matematica

I compito di ALGEBRA II

12 novembre 2012

Esercizio 1. (5 punti) Sia G un gruppo ciclico finito e siano $g, h \in G$ con $|g| = n$ e $|h| = m$.

1. Si determini $|\langle g\rangle \cap \langle h\rangle|$.
2. Si determini $|\langle g\rangle\langle h\rangle|$.

Esercizio 2. (9 punti) Siano

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Q}, a, c \neq 0 \right\} \quad \text{e} \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{Q}, u \neq 0 \right\}.$$

1. Si provi che G è un gruppo (rispetto all'usuale prodotto righe per colonne).
2. Si provi che K è un sottogruppo normale di G.
3. Si dimostri che $K = A \times B$, con $A, B \leq K$, A isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{Q}^{\times}$ dei razionali diversi da zero e B isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{Q}$.

Esercizio 3. (9 punti) Sia $G = S_6$.

1. Quante sono le classi di coniugio di elementi di ordine 6 di G ? E quante quelle di elementi di ordine 12 ?
2. È vero che ogni elemento di ordine 3 di G è il quadrato di un elemento di ordine 6 ?
3. Sia H un gruppo ciclico di ordine 12 che opera fedelmente sull'insieme $S = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Si provi che H <u>non ha</u> punti fissi.

Esercizio 4. (8 punti)

1. Sia G un gruppo tale che $|G| = pqrt$ con p, q, r, t primi (non necessariamente distinti). Si dimostri che se $p > qrt$ allora G ha sottogruppi di ordini, rispettivamente, pq, pr e pt.
2. Si provi che il gruppo alterno A_5 non ha sottogruppi di ordine 15.