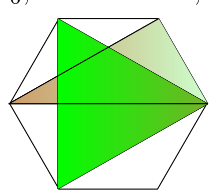
Corso di Laurea in Matematica
I compito di ALGEBRA II – 13 novembre 2015

Esercizio 1. (11 punti) Sia G il gruppo (additivo) prodotto diretto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia
$$D_n = \{(q, nq) \mid q \in \mathbb{Q}\}.$$
(1) Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $D_n \leq G$, e che se $n \neq m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ allora $D_n \cap D_m = \{0_G\}$.
(2) Fissato un generico $n \in \mathbb{N}$, si definisca un omomorfismo $\phi_n : G \to \mathbb{Q}$ tale che $D_n = \ker \phi_n$.
(3) Si provi che se $n \neq m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ allora $G = D_n \times D_m$ (prodotto diretto interno).

Esercizio 2. (7 punti) Nel gruppo simmetrico $G = S_6$ si consideri il sottoinsieme $\mathcal{L}_3 = \{x \in G \mid |x| = 3\}$.
(1) Si dica quante classi di coniugio di G sono contenute in $\mathcal{L}_3$, si determini $|C_G(x)|$ per ogni $x \in \mathcal{L}_3$, e quindi si calcoli $|\mathcal{L}_3|$.
(2) Siano P e Q due 3-sottogruppi di Sylow distinti di G; si provi che $P \cap Q = \{1\}$.

Esercizio 3. (5 punti) Sia Ω l'insieme di tutti i triangoli i cui vertici sono vertici dell'esagono regolare P_6; chiaramente, $|\Omega| = \binom{6}{3} = 20$.



Il gruppo $G = D_{12}$ delle simmetrie dell'esagono agisce sull'insieme Ω; si determini il numero delle orbite, e l'ordine di ciascuna.

Esercizio 4. (10 punti) Sia G un gruppo di ordine 231.
(1) Si provi che esiste un omomorfismo non-banale $G \to C_3$.
(2) Si provi che G contiene elementi di ordine 77 e di ordine 33.
(3) Supposto G non abeliano, si determini, per ogni divisore primo di $|G|$, il numero $n_p(G)$ di p-sottogruppi di Sylow di G; si provi che in questo caso non esiste alcun omomorfismo non-banale $G \to C_7$