compito di algebra II – 13 novembre 2015
soluzioni

Esercizio 1. *Sia G il gruppo prodotto diretto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia*

$$D_n = \{(q, nq) \mid q \in \mathbb{Q}\}.$$

(1) Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $D_n \leq G$, e che se $n \neq m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) allora $D_n \cap D_m = \{0_G\}$.
(2) Fissato un generico $n \in \mathbb{N}$, si definisca un omomorfismo $\phi_n : G \to \mathbb{Q}$ tale che $D_n = \ker \phi_n$.
(3) Si provi che se $n \neq m$ ($n, m \in \mathbb{N}$) allora $G = D_n \times D_m$ (prodotto diretto interno).

Soluzione. (1) $0_G = (0, 0) \in D_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siano $a = (x, nx), b = (y, ny)$ - con $x, y \in \mathbb{Q}$ - elementi di D_n; allora

$$a - b = (x - y, nx - ny) = (x - y, n(x - y)) \in D_n$$

e dunque $D_n \leq G$. Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, e $a \in D_n \cap D_m$. Allora esistono $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $a = (x, mx) = (y, my)$; dunque $x = y$ e $mx = ny$, il che forza $x = y = 0$; quindi $a = (0, 0) = 0_G$.

(2) Fissato $n \in \mathbb{N}$, D_n è il nucleo dell'omomorfismo $\phi_n : G \to \mathbb{Q}$ definito da

$$\phi_n((x, y)) = nx - y$$

per ogni $(x, y) \in G$.

(3) Siano $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Allora $D_n, D_m \trianglelefteq G$ perché G è abeliano; inoltre $D_n \cap D_m = \{0_G\}$ è già stato provato al punto (1). Resta da provare che $D_n + D_m = G$. Questo vuol dire che, per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ nx_1 + mx_2 = y \end{cases}$$

ammette soluzioni in $\mathbb{Q}$; il che è vero dato che il determinante della matrice è $m - n \neq 0$. Per ogni $(x, y) \in G$, si ha infatti $(x, y) = (x_1, nx_1) + (x_2, mx_2)$ con

$$x_1 = \frac{mx - y}{m - n} \ , \quad x_2 = \frac{y - nx}{m - n}.$$

Esercizio 2. *Nel gruppo simmetrico $G = S_6$ si consideri il sottoinsieme $\mathcal{L}_3 = \{x \in G \mid |x| = 3\}$.*

(1) Si dica quante classi di coniugio di G sono contenute in $\mathcal{L}_3$, si determini $|C_G(x)|$ per ogni $x \in \mathcal{L}_3$, e quindi si calcoli $|\mathcal{L}_3|$.
(2) Siano P e Q due 3-sottogruppi di Sylow distinti di G; si provi che $P \cap Q = \{1\}$.

Soluzione. (1) In generale, in un gruppo simmetrico qualsiasi S_n, se p è un primo, gli elementi di ordine p sono tutti e sole le permutazioni la cui decomposizione in cicli disgiunti contiene solo cicli di lunghezza p (e punti fissi). Pertanto, in S_6, l'insieme $\mathcal{L}_3$ contiene esattamente 2 classi di coniugio, quelle i cui rappresentanti sono le permutazioni:

$$\alpha = (1\ 2\ 3), \quad \beta = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6).$$

Il numero di coniugati in $G = S_6$ di α è

$$[G : C_G(\alpha)] = 2 \cdot \binom{6}{3} = 40,$$

e quello dei coniugati di β

$$[G : C_G(\beta)] = \frac{1}{2}\left[4 \cdot \binom{6}{3}\right] = 40.$$

Quindi, $|\mathcal{L}_3| = 40 + 40 = 80$.

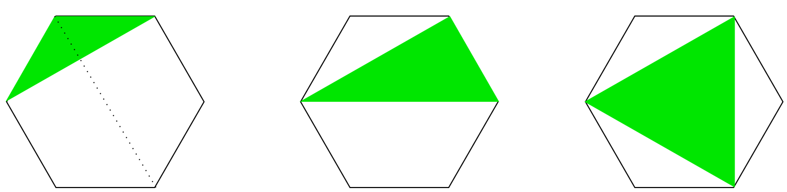
(2) Siano P, Q due 3-sottogruppi di Sylow distinti di $G = S_6$.
Ora, $|P| = |Q| = 9 = 3^2$, e dunque P e Q sono abeliani. Quindi, se $x \in P \cap Q$, allora sia P che Q sono contenuti in $C_G(x)$, e sono pertanto 3-sottogruppi di Sylow di $C_G(x)$. Se, per assurdo, $x \neq 1$, allora x è coniugata ad α oppure a β (definite al punto precedente); in ogni caso

$$|C_G(x)| = \frac{|G|}{[G : C_G(x)]} = \frac{6!}{40} = 18.$$

Dal Teorema di Sylow segue allora che $C_G(x)$ contiene un unico 3-sottogruppo di Sylow, da cui la contraddizione $P = Q$.

Esercizio 3. *Sia Ω l'insieme di tutti i triangoli i cui vertici sono vertici dell'esagono regolare P_6; chiaramente, $|\Omega| = \binom{6}{3} = 20$. Il gruppo $G = D_{12}$ delle simmetrie dell'esagono agisce sull'insieme Ω; si determini il numero delle orbite, e l'ordine di ciascuna.*

Soluzione. Sia $G = D_{12}$ il gruppo delle simmetrie dell'esagono; G è un gruppo diedrale, indicando con ρ la rotazione ρ di $\frac{2\pi}{6}$ radianti, si ha che ogni elemento di G è una potenza di ρ oppure una riflessione. Dato $\Delta \in \Omega$ determiniamo la lunghezza della sua G-orbita $O_G(\Delta)$, calcolando l'indice in G dello stabilizzatore G_Δ. Osservando che se un'isometria fissa un triangolo, allora ne permuta i vertici.



Sia Δ_1 il triangolo a sinistra nella figura; poiché le isometrie conservano le distanze, un'isometria che fissa Δ_1 (e quindi ne permuta i vertici) deve fissare il vertice in alto a sinistra. Poiché gli elementi di G che fissano un punto sono solo le riflessioni si conclude che G_{Δ_1} contiene l'identita è la rilessione lungo l'asse segnato col tratteggio. Dunque $|G_{\Delta_1}| = 2$ e quindi

$$|O_G(\Delta_1)| = [G : G_{\Delta_1}] = \frac{12}{2} = 6.$$

Sia Δ_2 il triangolo al centro nella figura; in questo caso le lunghezze dei lati (cioè le mutue distanze tra i vertici) sono tutte diverse, un'isometria che fissa Δ_2 deve quindi fissare ogni suo vertice e dunque deve essere l'identità; pertanto

$$|O_G(\Delta_2)| = [G : G_{\Delta_2}] = [G : \{1\}] = 12.$$

Sia Δ_3 il triangolo a destra nella figura; in questo caso il triangolo è equilatero, e lo stabilizzatrore in G contiene tutte le riflessioni lungo gli assi del triangolo (che sono anche riflessioni per l'esagono) e le rotazioni generate da ρ^2 (che sono tre); quindi G_{Δ_3} coincide con il gruppo delle simmetrie del triangolo equilatero, che ha ordine 6. Pertanto

$$|O_G(\Delta_3)| = [G : G_{\Delta_3}] = \frac{12}{6} = 2.$$

Il fatto che le tre orbite $O_G(\Delta_1)$, $O_G(\Delta_2)$, $O_G(\Delta_3)$ abbiano lunghezze diverse assicura che sono orbite distinte; quindi

$$|O_G(\Delta_1) \cup O_G(\Delta_2) \cup O_G(\Delta_3)| = 6 + 12 + 2 = 20 = |\Omega|.$$

Dunque $O_G(\Delta_1)$, $O_G(\Delta_2)$, $O_G(\Delta_3)$ sono tutte le orbite di G su Ω e il problema è risolto.

Esercizio 4. *Sia G un gruppo di ordine 231.*

(1) Si provi che esiste un omomorfismo non-banale $G \to C_3$.
(2) Si provi che G contiene elementi di ordine 77 e di ordine 33.
(3) Supposto G non abeliano, si determini, per ogni divisore primo di $|G|$, il numero $n_p(G)$ di p-sottogruppi di Sylow di G; si provi che in questo caso non esiste alcun omomorfismo non-banale $G \to C_7$

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.
Sia $n_{11} = n_{11}(G)$ il numero di 11-sottogruppi di Sylow di G; dal Teorema di Sylow si ha

$$n_{11} \equiv 1 \pmod{11} \quad \text{e} \quad n_{11}|21$$

da cui segue $n_{11} = 1$. Similmente, se $n_7 = n_7(G)$,

$$n_7 \equiv 1 \pmod 7 \quad \text{e} \quad n_7|33$$

e quindi $n_7 = 1$. pertanto, G contiene un unico (quindi normale) 11-sottogruppo di Sylow P, ed un unico 7-sottogruppo di Sylow Q. Allora $N := PQ$ è un sottogruppo normale di G di ordine 77 (che il prodotto di sottogruppi normali sia normale lo diamo per acquisito, comunque è un fatto banale). Osserviamo anche che $NP \times Q$ è un gruppo ciclico.

(1) G/N è un gruppo di ordine $231/77 = 3$ e dunque è ciclico di ordine 3; la proiezione $G \to G/N$ è quindi l'omomorfismo cercato.

(2) Abbiamo già ossrvato che N è ciclico; quindi un suo generatore è un elemento di G di ordine $|N| = 77$.
Sia T un 3-sottogruppo di Sylow di G; se, come sopra, P è 11-sottogruppo di Sylow di G, allora $P \trianglelefteq G$ e quindi PT è un sottogruppo di G di ordine

$$\frac{|P||T|}{|P \cap T|} = 33.$$

Ma un gruppo di ordine 33 è ciclico (infatti $n_3(PT) = 1 = n_{11}(PT)$); un generatore del gruppo ciclico PT è dunque un elemento di ordine 33 di G.

(3) Abbiamo già trovato $n_{11}(G) = n_7(G) = 1$. Se anche $n_3(G) = 1$ allora G è il prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow (che in questo caso sono tutti normali) e dunque è abeliano (addirittura è ciclico). Nel caso non-abeliano deve quindi essere $n_3(G) \neq 1$. Dal Teorema di Sylow si ha

$$n_3 \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{e} \quad n_3 | 77,$$

la sola possibilità rimasta è dunque $n_3(G) = 7$.
Supponiamo, per assurdo, esista un omomorfismo non-banale $\phi : G \to C_7$; allora $K = \ker \phi$ è un sottogruppo normale di G di ordine

$$|K| = \frac{|G|}{|G/K|} = \frac{|G|}{|\phi(G)|} = \frac{231}{7} = 33.$$

Poiché K è normale in G e contiene un 3-sottogruppo di Sylow, tutti i 3-sottogruppi di Sylow di G sono contenuti in K e dunque $n_3(G) = n_3(K) = 1$, assurdo.
