Corso di Laurea in Matematica

II compitino di ALGEBRA 2

28 gennaio 2011

Esercizio 1. (6 punti) Siano p un numero primo, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, e $F = GF(p^n)$ un campo di ordine p^n. Sia $1 \leq k \in \mathbb{N}$; si dimostri che F contiene una radice k-esima dell'unità il cui ordine (moltiplicativo) è k, se e solo se k divide $p^n - 1$.

Esercizio 2. (4 punti) Sia $E|F$ un'estensione finita di campi. Si provi che esiste un'estensione di campi $L|E$ tale che $L|F$ è un'estensione normale.

Esercizio 3. (12 punti) Sia $E = \mathbb{Q}[i\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}]$.

1. Si dica se l'estensione $E|\mathbb{Q}$ è normale.
2. Si determinino l'ordine e il tipo di isomorfismo del gruppo di Galois $Gal(E|\mathbb{Q})$.
3. Si dica quanti sono i campi intermedi nell'estensione $E|\mathbb{Q}$ e si descriva ognuno di essi mediante un suo generatore (su $\mathbb{Q}$).

Esercizio 4. (10 punti) Sia $1 \neq \omega \in \mathbb{C}$ tale che $\omega^7 = 1$, e sia $u = \omega + \omega^{-1}$.

1. Si determini il grado $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$.
2. Si provi che $\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}$ è un'estensione normale.
3. Sia $G = Gal(\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q})$; si provi che

$$\sum_{g \in G} g(u) = -1.$$