Corso di Laurea in Matematica
II compito di ALGEBRA II – 11 gennaio 2015

Esercizio 1. (5 punti) Sia $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \in \mathbb{C}$, e sia $u \in \mathbb{C}$ tale che $u^2 = 2+\omega$. Si determini il grado $[\mathbb{Q}[u]:\mathbb{Q}]$ ed il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. (4 punti) Siano F un campo di caratteristica 0, $f \in F[x]$ un polinomio non nullo e $g = f/(f,f')$ (dove f' è il derivato di f). Sia E campo di spezzamento per g su F; si provi che E è un campo di spezzamento per f.

Esercizio 3. (9 punti) Siano $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{K} = GF(3^4)$ campo di ordine 81, e sia $a \in \mathbb{K}$ tale che $\mathbb{K} = \mathbb{F}[a]$.

(1) Determinare il gruppo di Galois $Gal(\mathbb{K}|\mathbb{F})$;
(2) posto $b = a + a^9$, determinare il grado $[\mathbb{F}[b]:\mathbb{F}]$;
(3) si provi che se $b \notin \mathbb{F}$ allora per ogni $u \in \mathbb{K}\setminus\mathbb{F}[b]$ si ha $\mathbb{F}[u] = \mathbb{K}$.

Esercizio 4. (10 punti) Siano $u = \sqrt{1+\sqrt[3]{2}}$, E il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del suo polinomio minimo, e $G = Gal(E|\mathbb{Q})$; sia ω radice primitiva terza dell'unità.

(1) determinare l'ordine di G e provare che G non è abeliano.
(2) provare che $\omega \in E$ e che esiste un'estensione normale $L|\mathbb{Q}$ con $\omega \in L \subseteq E$ tale che $[E:L] = 2$;
(3) determinare $Gal(E|\mathbb{Q}(\omega))$.

Esercizio 5. (5 punti) Siano $E|F$ un'estensione di Galois, $G = Gal(E|F)$ e $u \in E$; posto $G_u = \{\sigma \in G \mid \sigma(u) = u\}$, si provi la seguente asserzione

$$G_u = 1 \;\Rightarrow\; F[u] = E.$$

Si dica quindi se l'implicazione inversa è vera.