Corso di Laurea in Matematica. Esame di Algebra II.
Esame scritto - 15 gennaio 2016

Esercizio 1. (5 punti) Sia $\phi : G \to A$ un omomorfismo del gruppo G nel gruppo abeliano A, e sia $W = G \times A$. Si provi che

$$H = \{(g, \phi(g)) \mid g \in G\}$$

è un sottogruppo normale di W, e che $W/H \simeq A$.

Esercizio 2. (7 punti) Sia G un gruppo di ordine 315.

(1) si provi che G è prodotto diretto (interno) di due sottogruppi propri;
(2) si provi che se esiste un omomorfismo non banale $G \to C_{14}$ allora G è abeliano (C_n è il gruppo ciclico di ordine n).

Esercizio 2. (5 punti) Siano p, q due primi "gemelli" (cioè $q = p + 2$), e sia G un gruppo di ordine pq. Supposto che G agisca su un insieme Ω di ordine $p^2 - 2$, si provi che G ha almeno un punto fisso in Ω.

Esercizio 3. (5 punti) Siano $M|F$ e $K|F$ estensioni di Galois del campo F; si provi che $(M \cap K)|F$ è un'estensione di Galois.

Esercizio 4. (10 punti) Sia E il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^5 - 10 \in \mathbb{Q}[x]$, e $G = Gal(E|\mathbb{Q})$.

(1) Determinare il grado $[E : \mathbb{Q}]$, e provare che G non è abeliano;
(2) determinare un campo intermedio $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq E$ tale che $K|\mathbb{Q}$ è normale e $[K : \mathbb{Q}] = 2$;
(3) provare che non esiste alcun campo intermedio $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq E$ tale che $L|\mathbb{Q}$ è normale e $[E : L] = 2$.