Corso di Laurea in Matematica. Esame di Algebra II.
Esame scritto - 15 febbraio 2016

Esercizio 1. (4 punti) Sia G un gruppo $N \triangleleft G$ e $H \leq G$ tali che $G = NH$. Si provi che se N è abeliano allora $N \cap H \triangleleft G$.

Esercizio 2. (10 punti) Sia K un campo di ordine 16; per ogni $a, b \in K, a \neq 0$ si definisca l'applicazione $\phi_{(a,b)} : K \to K$, ponendo, per ogni $x \in K$

$$\phi_{(a,b)}(x) = ax + b.$$

Si quindi $G = \{\phi_{(a,b)} \mid a, b \in K,\ a \neq 0\}$.

(1) Si provi che G è un sottogruppo di $Sym(K)$;
(2) si provi che se esiste un omomorfismo suriettivo $G \to K^*$ (con K^* intendiamo il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di K);
(3) si determini l'ordine $|G|$ e, per ogni suo divisore primo p, il numero di p-sottogruppi di Sylow di G.

Esercizio 3. (4 punti) Sia data un'azione del gruppo G sull'insieme Ω, con $|\Omega| = n$; sia $N \triangleleft G$ e $\mathcal{O}$ un'orbita per l'azione indotta di N su Ω. Si provi che per ogni $g \in G$, $g \cdot \mathcal{O}$ è ancora una N-orbita.

Esercizio 4. (5 punti) Sia $E|F$ un'estensione di campi, $a, u \in E$ con a algebrico su F; si provi che se u è trascendente su F allora è trascendente su $F[a]$.

Esercizio 5. (11 punti) Sia $u = \sqrt{2} - \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$.

(1) Si determini il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$, ed il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$;
(2) si provi che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2, \sqrt{2})$, si dica se l'estensione $\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}$ è normale e si deduca che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2)$.
(3) Posto E il campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$, si determini il grado $[E : \mathbb{Q}]$ ed il gruppo $Gal(E|\mathbb{Q})$.