esame scritto di algebra II – 15 febbraio 2016
soluzioni

Esercizio 1. *Sia G un gruppo $N \trianglelefteq G$ e $H \leq G$ tali che $G = NH$. Si provi che se N è abeliano allora $N \cap H \trianglelefteq G$.*

Soluzione. Che $N \cap H$ sia un sottogruppo di G è noto dalla teoria; proviamo che, nelle ipotesi del testo, è normale in G. Sia $a \in N \cap H$ e sia $g \in G$; allora $g = bh$ con $b \in N$ e $h \in H$; quindi, tenendo conto che essendo N abeliano, $ab = ba$,

$$a^g = g^{-1}ag = (bh)^{-1}a(bh) = h^{-1}b^{-1}abh = h^{-1}ab^{-1}bh = h^{-1}ah$$

Quindi $a^g = h^{-1}ah \in H \cap N$, così provando che $N \cap H \trianglelefteq G$.

Esercizio 2. *Sia K un campo di ordine 16; per ogni $a, b \in K, a \neq 0$ si definisca l'applicazione $\phi_{(a,b)} : K \to K$, ponendo, per ogni $x \in K$*

$$\phi_{(a,b)}(x) = ax + b.$$

Si quindi $G = \{\phi_{(a,b)} \mid a, b \in K,\ a \neq 0\}$.

(a) *Si provi che G è un sottogruppo di $Sym(K)$;*
(b) *si provi che se esiste un omomorfismo suriettivo $G \to K^*$ (con K^* intendiamo il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di K);*
(c) *si determini l'ordine $|G|$ e, per ogni suo divisore primo p, il numero di p-sottogruppi di Sylow di G.*

Soluzione. (a) Iniziamo provando che $\phi_{(a,b)} : K \to K$ è una biezione per ogni $(a, b) \in K^* \times K$. Siano $x, y \in K$ tali che $\phi_{(a,b)}(x) = \phi_{(a,b)}(y)$, allora $ax + b = ay + b$, da cui (poiché $a \neq 0_K$) $x = y$; dunque $\phi_{(a,b)}$ è iniettiva e pertanto, essendo K un insieme finito, è biettiva. Abbiamo quindi provato che $G \subseteq Sym(K)$. Per dimostrare che è un sottogruppo cominciamo con l'osservare che

$$\iota_K = \phi_{(1,0)} \in G.$$

Inoltre, se $(a, b), (c, d) \in K^* \times K$, allora, per ogni $x \in K$,

$$(\phi_{(a,b)} \circ \phi_{(c,d)})(x) = \phi_{(a,b)}(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$$

quindi

$$\phi_{(a,b)} \circ \phi_{(c,d)} = \phi_{(ac,ad+b)} \tag{1}$$

e in particolare si ha

$$\phi^{-1}_{(a,b)} = \phi_{(a^{-1},-a^{-1}b)} \tag{2}$$

A questo punto l'applicazione del criterio per sottogruppi è immediata e coronata dal successo; siano $\phi_{(a,b)}, \phi_{(c,d)} \in G$; allora

$$\phi^{-1}_{(a,b)} \circ \phi_{(c,d)} = \phi_{(a^{-1},-a^{-1}b)} \circ \phi_{(c,d)} = \phi_{(a^{-1}c,a^{-1}d-a^{-1}b)} \in G.$$

(b) L'omomorfismo cercato è suggerito in maniera abbastanza naturale dalla formula (1); si definisce $\Phi : G \to K^*$ ponendo, per ogni $\phi_{(a,b)} \in G$

$$\Phi(\phi_{(a,b)}) = a.$$

Chiaramente, Φ è un'applicazione suriettiva, e per ogni $\phi_{(a,b)}, \phi_{(c,d)} \in G$,

$$\Phi(\phi_{(a,b)} \circ \phi_{(c,d)}) = \Phi(\phi_{(ac,ad+b)}) = ac = \Phi(\phi_{(a,b)})\Phi(\phi_{(c,d)})$$

quindi Φ è un omomorfismo di gruppi.

(c) Chiaramente, $|G| = |K^* \times K| = |K^*||K| = 15 \cdot 16 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.
Sia $N = \ker(\Phi)$; allora, per il Teorema di omomorfismo, poiché Φ è suriettivo, $|G/N| = |K^*| = 15$, e dunque $|N| = |G|/15 = 16$. Quindi N è un 2-sottogruppo di Sylow di G; poiché inoltre $N \trianglelefteq G$, si ha che N è l'unico 2-sottogruppo di Sylow di G, quindi $n_2(G) = 1$.

Vediamo il caso $p = 3$. Sia T un 3-sottogruppo di Sylow di G, allora $|T| = 3$. Osserviamo che, poiché $G/N \simeq K^*$ che è abeliano (di fatto, è ciclico), $NT/N \trianglelefteq G/N$ e dunque, per il Teorema di Corrispondenza $NT \trianglelefteq G$. Quindi NT contiene tutti i coniugati di T, ovvero tutti i 3-sottogruppi di Sylow di G; pertanto

$$n_3(G) = n_3(NT) \text{ divide } |NT|/|T| = 16.$$

da $n_3(G) \equiv 1 \pmod 3$, segue $n_3(G) \in \{1, 4, 16\}$

Esercizio 3. *Sia data un'azione del gruppo G sull'insieme Ω, con $|\Omega| = n$; sia $N \trianglelefteq G$ e $\mathcal{O}$ un'orbita per l'azione indotta di N su Ω. Si provi che per ogni $g \in G$, $g \cdot \mathcal{O}$ è ancora una N-orbita.*

Soluzione. Sia $x \in \Omega$ tale che

$$\mathcal{O} = O_N(x) = \{a \cdot x \mid a \in N\}.$$

Sia $g \in G$; dimostriamo che $g \cdot \mathcal{O} = O_N(g \cdot x)$. Il generico elemento di $g \cdot \mathcal{O}$ è $g \cdot (a \cdot x)$, con $a \in N$; ora,

$$g \cdot (a \cdot x) = (ga) \cdot x = (gag^{-1}g) \cdot x = gag^{-1} \cdot (g \cdot x) \in O_N(g \cdot x)$$

poiché $gag^{-1} \in N \trianglelefteq G$. Quindi $g \cdot \mathcal{O} \subseteq O_N(g \cdot x)$. L'inclusione inversa si dimostra convenientemente applicando questa stessa: si ha infatti

$$g^{-1} \cdot \mathcal{O}_N(g \cdot x) \subseteq O_N(g^{-1} \cdot (g \cdot x)) = O_N(x) = \mathcal{O}$$

e quindi, applicando g a sinistra: $O_N(g \cdot x) \subseteq g \cdot \mathcal{O}$.

Esercizio 4. *Sia $E|F$ un'estensione di campi, $a, u \in E$ con a algebrico su F; si provi che se u è trascendente su F allora è trascendente su $F[a]$.*

Soluzione. Poiché a è algebrico su F, sia ha $[F(a) : F] < \infty$. Supponiamo per assurdo che u sia algebrico su $F(a)$; allora $[F(a,u) : F(a)] < \infty$, e per la Formula dei Gradi

$$[F(a,u) : F] = [F(a,u) : F(a)][F(a) : F] < \infty.$$

In particolare $[F(u) : F] < \infty$ e quindi u è algebrico su F; contraddizione.

Esercizio 5. *Sia $u = \sqrt{2} - \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$.*

(1) *Si determini il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$, ed il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$;*

(2) *si provi che* $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2, \sqrt{2})$, *si dica se l'estensione* $\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}$ *è normale e si deduca che* $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2)$.

(3) *Posto* E *il campo di spezzamento per* f *su* $\mathbb{Q}$, *si determini il grado* $[E : \mathbb{Q}]$ *ed il gruppo* $Gal(E|\mathbb{Q})$.

Soluzione.
