Corso di Laurea in Matematica. Esame di Algebra II.
Esame scritto - 17 maggio 2016

Esercizio 1. (10 punti) Sia $H = \langle \alpha, \beta \rangle$ il sottogruppo di S_5 generato dalle due permutazioni $\alpha = (1\,4\,5\,2)$ e $\beta = (1\,3\,4\,2)$.

(1) Si determini l'ordine della permutazione $\gamma = \alpha\beta$;
(2) si dica quanti sono i coniugati di γ in S_5;
(3) si provi che il sottogruppo $\langle \gamma \rangle$ è normale in H.
(4) si provi che i sottogruppi $\langle \alpha \rangle$ e $\langle \beta \rangle$ sono coniugati in H.

Esercizio 2. (7 punti) Sia p un numero primo e si consideri

$$N = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid (p, b) = 1 \right\}.$$

(1) Si provi che N è un sottogruppo (normale) di $(\mathbb{Q}, +)$, e che per ogni $x \in \mathbb{Q}$ l'ordine dell'elemento xN nel gruppo quoziente $\mathbb{Q}/N$ è una potenza di p;
(2) si provi che l'applicazione $\phi : \mathbb{Q}/N \to \mathbb{Q}/N$ data da $\phi(xN) = (px)N$, per ogni $xN \in \mathbb{Q}/N$, è un omomorfismo suriettivo ma non iniettivo.

Esercizio 3. (4 punti) Sia $E|\mathbb{Q}$ un estensione di grado 3, e sia $u \in E$ tale che $u^4 \in \mathbb{Q}$; si provi che $u \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 4. (12 punti) Sia E il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f = x^4 - 6x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

(1) Si provi che $i\sqrt{3} \in E$;
(2) si determini $E \cap \mathbb{R}$;
(3) si determini il gruppo $Gal(E|\mathbb{Q})$; infine si provi che esiste un'estensione normale $L|\mathbb{Q}$ con $L \subseteq E$ e $[E : L] = 2$.