

Corso di Laurea in Matematica. Esame di Algebra II.  
**Esame scritto - 20 giugno 2016**

**Esercizio A.** (7 punti) Sia  $G$  un gruppo con  $|G| = 154$ .

- (1) Si provi  $G$  ha un sottogruppo normale  $N$  di indice 2;
- (2) si provi che il sottogruppo  $N$  del punto (1) è abeliano;

**Esercizio B.** (9 punti) Sia  $E|F$  un'estensione di Galois, e sia  $\mathcal{G} = Gal(E|F)$ . Per ogni  $\sigma \in \mathcal{G}$  e  $0 \neq a \in E$ , si consideri l'applicazione  $\pi_{(a,\sigma)} : E \rightarrow E$  definita ponendo, per ogni  $x \in E$ ,  $\pi_{(a,\sigma)}(x) = a\sigma(x)$ . Sia

$$W = \{\pi_{(a,\sigma)} | 0 \neq a \in E, \sigma \in \mathcal{G}\}.$$

- (1) Si provi che  $W$  è un sottogruppo di  $Aut((E, +))$ .
- (2) Si determini un omomorfismo suriettivo  $W \rightarrow \mathcal{G}$ .
- (3) Si determini il centro  $Z(W)$ .

**Esercizio C.** (7 punti) Sia  $E$  il campo di spezzamento sul campo  $\mathbb{F}$  del polinomio

$$x^3 - 3 \in \mathbb{F}[x].$$

Si determini il grado  $[E : \mathbb{F}]$  nei casi seguenti:  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ .

**Esercizio D.** (10 punti) Sia  $E$  il campo di spezzamento su  $\mathbb{Q}$  del polinomio

$$f = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 6;$$

- (1) Si determini il grado  $[E : \mathbb{Q}]$ ;
- (2) si determini (a meno di isomorfismo) il gruppo di Galois  $Gal(E|\mathbb{Q})$ ;
- (3) si dica quante sono le estensioni intermedie  $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq E$  tali che  $[E : L] = 2$ , e si dica quanti di questi campi  $L$  sono normali su  $\mathbb{Q}$