Corso di Laurea in Matematica. Esame di Algebra II.
Esame scritto - 15 luglio 2016

Esercizio A. (10 punti) Sull'insieme $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ si consideri l'operazione definita da, per ogni $a, b \in \mathbb{Q},\ x, y \in \mathbb{Z}$,

$$(a, x) \cdot (b, y) = (a + 2^x b, x + y)$$

(1) Si provi $(G, \cdot)$ è un gruppo, e si dica se è abeliano;
(2) si provi che esiste un omomorfismo suriettivo (di gruppi) $\phi : G \to \mathbb{Z}$;
(3) posto $K = \ker \phi$, si provi che $K \cap \langle (1,1) \rangle = \{1_G\}$ [sugg.: se non riesce direttamente, cercare di usare l'omomorfismo ϕ ...]

Esercizio B. (7 punti) Sia G un gruppo di ordine 441, e P un 7-sottogruppo di Sylow di G.

(1) Si provi P è normale in G.
(2) Si assuma quindi che G ammetta un'azione transitiva su Ω, con $|\Omega| = 7$, e sia $H = G_x$ per un elemento $x \in \Omega$; si provi che $P \cap H \triangleleft G$ e $PH = G$.

Esercizio C. (10 punti) Sia $u = \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$.

(1) Si provi $\sqrt[3]{12} \in \mathbb{Q}(u)$;
(2) si determini il polinomio minimo $f \in \mathbb{Q}[x]$ di u su $\mathbb{Q}$;
(3) posto E il campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$ si determini il grado $[E : \mathbb{Q}]$ ed il gruppo $Gal(E|\mathbb{Q})$.

Esercizio D. (7 punti) Si consideri l'estensione $L|\mathbb{Z}_3$, dove $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e L è un campo di ordine 81.

(1) Si provi che il polinomio $g = x^3 - x + \bar{1}$ è irriducibile in $L[x]$;
(2) posto E il campo di spezzamento di g su L, si dica quanto sottocampi intermedi ci sono nell'estensione $E|\mathbb{Z}_3$.