

Corso di Laurea in Matematica. Esame di Algebra II.

**Esame scritto - 7 settembre 2016**

**Esercizio A.** (7 punti) Sia  $p \geq 5$  un numero primo; nel gruppo simmetrico  $G = S_p$  si consideri una permutazione  $\sigma$  di tipo ciclico  $[2, p-2]$

- (1) Si dica se  $\sigma \in A_p$ ;
- (2) si determini il numero di coniugati di  $\sigma$  in  $G$ ;
- (3) provi che  $C_G(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ .

**Esercizio B.** (9 punti) Sia  $G$  un gruppo di ordine 555.

- (1) Si provi che  $G$  ha un sottogruppo normale di ordine 37, ed uno di ordine 185;
- (2) si determini il numero di 5-sottogruppi di Sylow di  $G$ ;
- (3) supponendo che  $G$  non sia abeliano si determini il numero di 3-sottogruppi di Sylow di  $G$ .

**Esercizio C.** (10 punti) Sia  $f = x^5 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ ; sia  $K$  il campo di spezzamento di  $f$  su  $\mathbb{Q}$  e  $G = Gal(K|\mathbb{Q})$ .

- (1) Si determini il grado  $[K : \mathbb{Q}]$ ;
- (2) si dica se  $G$  è abeliano;
- (3) si provi che esiste un unico campo intermedio  $\mathbb{Q} \leq L \leq K$  tale che  $[L : \mathbb{Q}] = 4$ .

**Esercizio D.** (7 punti) Sia  $E|F$  un'estensione di Galois, e sia  $G = Gal(E|F)$ . Preso  $u \in E$ , e detto  $f \in F[x]$  il polinomio minimo di  $u$  su  $F$ , si provi che

- (1)  $deg(f)$  divide  $|G|$ ;
- (2) l'insieme delle radici di  $f$  in  $E$  è  $\{\sigma(u) \mid u \in G\}$ .