Corso di laurea in Matematica, Università di Firenze
Esame di Algebra II - esame scritto del 5 febbraio 2019

Esercizio 1 (6 punti). Sull'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si definisca l'operazione $*$ ponendo, per ogni $(a, b), (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(a, b) * (x, y) = (a + (-1)^b x, b + y).$$

Si provi che $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$ è un gruppo, e che l'insieme $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ è un suo sottogruppo normale..

Esercizio 2 (6 punti). Fissati un intero $n \geq 1$ ed un primo positivo p, poniamo $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ e $X = I_n^p = \{(x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in I_n, i = 1, \dots, p\}$. Sia $H = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico di ordine p, e definiamo un'azione di H su X ponendo, per ogni $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in X$,

$$g \cdot (x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_p, x_1, \dots, x_{p-1}).$$

(1) Si determini il numero di punti fissi per l'azione di H su X.

(2) Si trovi il numero di orbite (e si dimostri il piccolo Teorema di Fermat).

Esercizio 3 (6 punti). Sia G un gruppo non commutativo di ordine 63. Si dica quanti sono i 3-sottogruppi di Sylow di G. Si provi che se P, Q sono due distinti 3-sottogruppi di Sylow, allora $\{1\} \neq P \cap Q = Z(G)$.

Esercizio 4 (6 punti). Si determini il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ del numero reale $b = 3 - \sqrt{3}$. Si determini quindi il grado $[\mathbb{Q}(\sqrt{b-1}) : \mathbb{Q}]$.

Esercizio 4 (9 punti). Siano $f = x^5 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$, e $\omega \in \mathbb{C}$ una radice primitiva 5-esima dell'unità. Sia E il campo di spezzamento per f su $\mathbb{Q}$.

(1) Determinare l'ordine del gruppo $G = Gal(E|\mathbb{Q})$.

(2) Si trovi il polinomio minimo di $\omega + \omega^4$; posto L il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ ed osservato che $L \subseteq E$ si dica se il gruppo $Gal(E|L)$ è commutativo.

(3) Si determini il grado $[E \cap \mathbb{R} : \mathbb{Q}]$ e si dica quante estensioni normali di $\mathbb{Q}$, esclusa $\mathbb{Q}$ stessa, sono contenute in $E \cap \mathbb{R}$.